

Cenni di matematica finanziaria

Un'importante applicazione della percentuale si ha nella *matematica finanziaria*, che è quella parte della matematica che si occupa di tutti i problemi relativi al denaro e al suo impiego. Il campo, come potete immaginare, è vastissimo; il denaro è il mezzo attraverso il quale si realizza qualsiasi operazione commerciale; con esso si compra, si vende e si guadagna.

Il denaro, inoltre, può essere considerato esso stesso una merce ed è soprattutto in questo senso che la matematica finanziaria se ne occupa, studiando concessioni di crediti, impieghi di capitale, sconti commerciali ecc.

Esaminiamo dunque le più semplici operazioni finanziarie.

Impiego di capitali

Sappiamo che, generalmente, chi dà in uso per breve o lungo tempo un bene di sua proprietà riceve un compenso secondo accordi prestabiliti, per esempio:

- se *affitto* un appartamento a una persona, questa mi darà un compenso pagando una *pigione* secondo l'accordo che abbiamo stipulato;
- se *noleggio* un mezzo di trasporto darò un compenso, detto *nolo*, al proprietario del mezzo secondo l'accordo stabilito;
- se *presto* una certa somma di denaro, riceverò un *compenso* secondo certi accordi prestabiliti.

Prendiamo adesso in esame l'ultimo esempio che rientra nel vasto campo dell'*impiego di capitali*.

Un privato cittadino in possesso di una certa somma di denaro la può impiegare prestandola a un ente pubblico o privato (banca, posta, istituti finanziari, aziende); un esempio di prestito è quello che si effettua nei riguardi di una banca e che prende il nome di **deposito bancario**.

Vediamo in che cosa consiste.

Il signor Travel deposita presso una banca una certa somma di denaro, detta **capitale** = C , per un periodo di tempo, detto **periodo di capitalizzazione** = t e per questo periodo la banca darà al signor Travel un compenso, detto **interesse semplice** = I .

Il tempo t può essere espresso in anni, mesi o giorni; per tutti i calcoli finanziari si considera l'*anno commerciale* (360 giorni) e il *mese commerciale* (30 giorni).

L'interesse I viene espresso sotto forma di percentuale: per esempio un interesse annuo del 9% vuol dire che, per ogni anno di deposito, si avrà un compenso di L 9 su ogni L 100 prestate.

Il tasso di tale percentuale viene detto **tasso** (o **ragione**) di **interesse semplice** = r .

Alla fine del periodo di capitalizzazione, quindi, la banca restituisce al signor Travel il suo capitale C più l'interesse maturato che si chiama **montante** = M .

Con alcuni esempi osserviamo adesso che un problema di deposito bancario si riduce a un problema del tre composto fra le grandezze direttamente proporzionali:

Capitale	Tempo	Interesse	Tasso
C	t	I	r

Calcolo dell'interesse I

È stato depositato in banca un capitale di L 5 000 000 per 6 anni a un tasso del 9%. Quante sarà l'interesse maturato alla fine dei 6 anni?

Risoluzione

Applichiamo in questo caso il procedimento dei problemi del tre composto; lo specchio sarà:

Capitale	Interesse	Tempo
L 100 ↑	L 9 ↑	1 anno ↑
L 5 000 000 ↑	x ↑	6 anni ↑
(D)		(D)

per cui:

$$y = 9 \cdot \frac{5\,000\,000}{100} \cdot \frac{6}{1} = 2\,700\,000.$$

Generalizzando il problema, lo specchio precedente diventa:

Capitale	Interesse	Tempo	
100 ↑	r ↑	1 ↑	
C ↑	I ↑	t(a) ↑	(la lettera "a", vicina alla t di tempo, significa che questo è espresso in anni)
(D)		(D)	

da cui:

$$I = r \cdot \frac{C}{100} \cdot \frac{t(a)}{1} \quad \text{cioè} \quad I = \frac{C \cdot r \cdot t(a)}{100}.$$

E se il tempo fosse espresso in mesi (m) o in giorni (d)? Basterebbe dividere ancora per 12 o per 360.

Pertanto le tre formule per il calcolo dell'interesse sono:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t(a)}{100} \quad I = \frac{C \cdot r \cdot t(m)}{1200} \quad I = \frac{C \cdot r \cdot t(d)}{36000}$$

Calcolo del capitale C

Un capitale depositato in banca per 4 anni a un tasso del 7% ha maturato un interesse di L 190 000. A quanto ammonta questo capitale?

Risoluzione

Possiamo risolverlo ancora come un problema del tre composto; lo specchio sarà:

Capitale	Interesse	Tempo
L 100 ↑	L 7 ↑	1 ↓
x ↑	L 190 000 ↑	4 ↓
	(D)	(I)

per cui:

$$x = 100 \cdot \frac{190\,000}{7} \cdot \frac{1}{4} = 7\,000\,000.$$

Generalizzando il problema, lo specchietto sarà:

Capitale	Interesse	Tempo
100 ↑	r ↑	1 ↓
C ↑	I ↑	t(a) ↓
	(D)	(I)

da cui:

$$C = 100 \cdot \frac{I}{r} \cdot \frac{1}{t(a)} \quad \text{cioè:} \quad C = \frac{I \cdot 100}{r \cdot t(a)}$$

Anche qui il tempo può essere espresso in mesi o in giorni; in definitiva avremo le tre formule:

$$C = \frac{I \cdot 100}{r \cdot t(a)} \quad C = \frac{I \cdot 1200}{r \cdot t(m)} \quad C = \frac{I \cdot 36000}{r \cdot t(d)}$$

Calcolo del tasso r

Un capitale di L 11000000 depositato in banca per 3 anni ha maturato un interesse di L 2640000. Quale tasso è stato applicato?

Risoluzione

Possiamo risolverlo ancora come un problema del tre composto; lo specchietto sarà quindi:

Capitale	Interesse	Tempo
L 100 ↓	x ↓	1 ↓
L 11000000 ↓	L 2640000 ↓	3 ↓
(D)		(D)

per cui:

$$x = 2640000 \cdot \frac{100}{11000000} \cdot \frac{1}{3} = 8.$$

Generalizzando avremo:

Capitale	Interesse	Tempo
100 ↓	r ↓	1 ↓
C ↓	I ↓	t(a) ↓
(D)		(D)

da cui:

$$r = I \cdot \frac{100}{C} \cdot \frac{1}{t(a)} \quad \text{cioè} \quad r = \frac{I \cdot 100}{C \cdot t(a)}$$

e quindi le tre formule:

$$r = \frac{I \cdot 100}{C \cdot t(a)} \quad r = \frac{I \cdot 1200}{C \cdot t(m)} \quad r = \frac{I \cdot 36000}{C \cdot t(d)}$$

Calcolo del tempo t

Un capitale di L 8500000, depositato in banca al tasso del 6%, ha maturato un interesse di L 2040000. Per quanto tempo è stato depositato?

Risoluzione

Risolviamo scrivendo lo specchietto:

Capitale	Interesse	Tempo
L 100 ↓	L 6 ↑	1 ↑
L 8500000 ↓	L 2040000 ↑	x ↑
(I)	(D)	

per cui:

$$x = 1 \cdot \frac{100}{8\,500\,000} \cdot \frac{2\,040\,000}{6} = 4.$$

Generalizzando il problema, lo specchietto diventa:

Capitale	Interesse	Tempo
100 ↓	r ↑	1 ↑
C ↓	I ↑	$t(a)$ ↑
(I)	(D)	

da cui:

$$t(a) = 1 \cdot \frac{I}{r} \cdot \frac{100}{C} \quad \text{cioè:} \quad t(a) = \frac{I \cdot 100}{C \cdot r}$$

Anche qui avremo le tre formule:

$$t(a) = \frac{I \cdot 100}{C \cdot r} \quad t(m) = \frac{I \cdot 1200}{C \cdot r} \quad t(d) = \frac{I \cdot 36\,000}{C \cdot r}$$

Per quanto detto inizialmente, se al capitale iniziale C aggiungiamo l'interesse I maturato dopo un certo tempo e a un certo tasso, otteniamo il montante M , quindi:

$$M = C + I \quad C = M - I \quad I = M - C$$

Esempi

1. Calcolare l'interesse prodotto da un capitale di L 9000000 impiegato a un tasso del 7% per 4 anni e 6 mesi (a = anni; m = mesi).

Considerando che $4^a 6^m = (4 \times 12) + 6 = 54$ mesi, possiamo applicare la formula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t(m)}{1200} \quad \text{quindi:} \quad I = \frac{9\,000\,000 \times 7 \times 54}{1200} = 2\,835\,000.$$

2. Calcoliamo il capitale che, impiegato per 3 anni, 6 mesi e 20 giorni (d = giorni), al tasso del 4%, ha prodotto un interesse di L 2560000.



Considerando che $3^a 6^m 20^d = [(3 \times 12 + 6) \times 30] + 20 = 1280$ giorni, possiamo **applicare** la formula:

$$C = \frac{I \cdot 36\,000}{r \cdot t(d)} \quad \text{quindi:} \quad C = \frac{2\,560\,000 \times 36\,000}{4 \times 1280} = 18\,000\,000.$$

3. Calcolare il tasso a cui è stato impiegato un capitale di L 5 500 000 che in 9 anni ha maturato un interesse di L 3 465 000.

La formula che useremo in questo caso è:

$$r = \frac{I \cdot 100}{C \cdot t(a)} \quad \text{per cui:} \quad r = \frac{3\,465\,000 \times 100}{5\,500\,000 \times 9} = 7.$$

4. Calcolare il tempo di impiego di un capitale di L 8 500 000 che al 6% ha maturato un interesse di L 1 700 000.

Applicheremo la formula:

$$t(a) = \frac{I \cdot 100}{C \cdot r} \quad \text{per cui:} \quad t(a) = \frac{1\,700\,000 \times 100}{8\,500\,000 \times 6} = \frac{10}{3}.$$

Ricordiamo che $\frac{10}{3}$ di un anno equivale a $(12 : 3 \times 10) = 40$ mesi, cioè a 3 anni e 4 mesi.

5. Calcolare il montante di un capitale di L 6 700 000 impiegato al 3% per 4 anni. Calcoliamo prima l'interesse applicando la formula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t(a)}{100} \quad \text{per cui:} \quad I = \frac{6\,700\,000 \times 3 \times 4}{100} = 804\,000.$$

Poiché $M = C + I$, avremo:

$$M = L (6\,700\,000 + 804\,000) = L 7\,504\,000.$$

Legge di capitalizzazione semplice e composta

In tutti gli esempi considerati abbiamo parlato, come dicevamo all'inizio, di interesse semplice; in effetti l'interesse si distingue in interesse semplice e interesse composto. Si parla di **interesse semplice** quando gli interessi che un capitale produce in un certo periodo di tempo (giorni, mesi o anni) non fruttano a loro volta altri interessi.

Quando invece maturano gli interessi degli interessi, si ha l'**interesse composto** che, nel più frequente dei casi, viene aggiunto al capitale che lo ha prodotto alla fine di ogni anno.

L'interesse composto I_c trova applicazione pratica quando si impiega il capitale per un periodo di tempo superiore all'anno, mentre quello semplice per un periodo inferiore. Ciò, però, non esclude che si possa calcolare l'interesse semplice per un periodo superiore all'anno e l'interesse composto per un periodo inferiore.

Soffermiamoci in entrambi i casi, interesse semplice e composto, al calcolo del montante.

- Nel caso dell'**interesse semplice** sappiamo che $M = C + I$, e poiché:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \quad \text{avremo} \quad M = C + \frac{C \cdot r \cdot t}{100}.$$

Se anziché considerare il tasso di interesse r , considerassimo il tasso di interesse unitario, cioè $\frac{r}{100}$, indicandolo con i , potremmo scrivere $M = C + C \cdot i \cdot t$, ovvero:

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t) \quad [1]$$

La [1] è la funzione che esprime la variazione tra il montante e il tempo; si dice che esprime la **legge di capitalizzazione semplice**.

- Nel caso dell'**interesse composto**, per ottenere il montante dobbiamo tener presente che alla fine di ogni anno gli interessi maturati si sommano al capitale e quindi ogni anno gli interessi vanno calcolati sul nuovo montante. Vediamo di arrivare alla formula considerando la seguente tabella:

tempo	montante
1 anno	$M_1 = C (1 + i)$
2 anni	$M_2 = M_1 (1 + i) = C (1 + i) (1 + i) = C (1 + i)^2$
3 anni	$M_3 = M_2 (1 + i) = C (1 + i)^2 (1 + i) = C (1 + i)^3$
t anni	$M_t = C (1 + i)^t$

In generale quindi avremo:

$$M = C (1 + i)^t \quad [2]$$

La [2] è la funzione che esprime la **legge di capitalizzazione composta**.

Un confronto fra l'uso dei due sistemi di capitalizzazione ti aiuterà a comprendere meglio la loro utilità.

Esempio

Deposito in banca una somma di L 200000000 al tasso d'interesse del 6% netto; voglio sapere a quanto ammonterà il mio capitale fra 7 anni.

a) Calcolo del montante M con l'interesse semplice I :

$$M = C (1 + i \cdot t) \quad \text{essendo} \quad i = \frac{r}{100} = \frac{6}{100} = 0,06 \quad \text{avremo:}$$

$$M = L 200000000 (1 + 0,06 \cdot 7) = L 284000000.$$

b) Calcolo del montante M con l'interesse composto I_c :

$$M = C (1 + i)^t$$

$$M = L 200000000 (1 + 0,06)^7 = L 300726000.$$

Come si può notare dai risultati, c'è una differenza tra il primo e il secondo montante di L 16726000.

Altre forme di investimento

Un altro modo di impiegare un capitale è costituito dai **titoli di credito**, che sono **dei prestiti** allo Stato o alle imprese.

I più importanti sono:

- BOT: Buoni Ordinari del Tesoro;
- CCT: Certificati di Credito del Tesoro;
- BTP: Buoni del Tesoro Pluriennali;
- OBBLIGAZIONI: prestiti a lungo termine alle imprese;
- AZIONI: quota del capitale di una società.

Esaminiamoli brevemente.

- BOT (Buoni Ordinari del Tesoro). Si tratta di titoli di Stato emessi dal Ministero del Tesoro, che possono avere tre tipi di scadenza: a 3 mesi (91 giorni), 6 mesi (183 giorni) e un anno (365 giorni). Sono quindi titoli a breve durata. Il loro prezzo di emissione è inferiore a quello che verrà restituito alle scadenze trimestrali, semestrali e annuali. La collocazione sul mercato di questi titoli avviene attraverso il meccanismo dell'asta (asta competitiva), essi vengono cioè assegnati al prezzo offerto da ciascun partecipante all'asta.

Al momento dell'emissione i titoli sono soggetti a una ritenuta fiscale del 12,50%.

Vediamo di chiarire il tutto con un esempio.

Esempio

Un risparmiatore decide di acquistare dei BOT a 3 mesi per un valore di L 10000000. Il prezzo di emissione dei BOT è di L 97,25 ogni L 100 (valore nominale). Qual è il rendimento effettivo netto?

Se il prezzo di emissione è di L 97,25 e L 100 è il valore nominale di rimborso, è evidente che il risparmiatore pagherà L 9725000 e alla scadenza dei 3 mesi riceverà i suoi L 10000000. Si è detto, però, che sui BOT grava una ritenuta fiscale del 12,50%, quindi, per sapere quant'è esattamente il rendimento effettivo netto, dovremo effettuare i seguenti calcoli:

$L (10000000 - 9725000) = L 275000$ (interesse lordo);

$L 275000 \cdot 12,50\% = L 34375$ (incidenza fiscale sull'interesse lordo);

$L (9725000 + 34375) = L 9759375$ (prezzo effettivo di assegnazione);

$L (10000000 - 9759375) = L 240625$ (interesse netto).

- CCT (Certificati di Credito del Tesoro). Sono titoli emessi sempre dal Ministero del Tesoro, con scadenza minima di 4 anni e massima di 10 anni. Al momento dell'emissione questi titoli, al pari dei BOT, vengono, generalmente, pagati un prezzo inferiore a quello di rimborso.

Esistono, inoltre, due tipi di CCT: **CCT a cedola semestrale** e **CCT a cedola annuale**. Per il primo tipo il risparmiatore, ogni 6 mesi, riceve una certa somma di denaro tramite lo stacco di una cedola (una sorta di tagliando); nel secondo caso

lo stacco della cedola avviene alla fine dell'anno. La somma corrisposta al risparmiatore, ogni 6 mesi o ogni anno, dipende da come sono andate le precedenti aste di aggiudicazione dei BOT a sei mesi e a un anno (per indicare questo fatto si dice che il rendimento dei CCT è *indicizzato*). A questa somma bisogna aggiungere una lieve maggiorazione (oscillante tra lo 0,3% e lo 0,7%) da determinare di volta in volta. Se un CCT a cedola annuale dà un rendimento del 9,8% (percentuale determinata in base all'ultima asta di BOT annuali) e a questa percentuale aggiungiamo, per esempio, una maggiorazione dello 0,7%, il rendimento complessivo sarà pari a: $9,8\% + 0,7\% = 10,5\%$.

- BTP (Buoni del Tesoro Pluriennali). Si tratta di titoli di Stato a durata compresa tra i 2 e i 5 anni (investimento a medio termine) e a prezzo di emissione praticamente uguale a quello nominale. Vengono collocati attraverso il sistema dell'asta mensile o bimestrale. A differenza dei CCT il tasso d'interesse corrisposto non dipende da nessun fattore, ma rimane invariato per tutta la durata dell'investimento e viene pagato, mediante lo stacco di una cedola, ogni 6 mesi. Un investimento di questo tipo diventa particolarmente interessante quando il tasso d'inflazione tende a scendere, dal momento che l'interesse corrisposto rimane invariato e non dipende da nessun fattore.

Tutti e tre i tipi di investimento considerati sono titoli di Stato, emessi dallo Stato attraverso il Ministero del Tesoro per finanziare il proprio **disavanzo pubblico**, cioè quella situazione di fine anno in cui lo Stato registra un eccesso di spese rispetto alle entrate.

- OBBLIGAZIONI. Sono dei titoli a lungo termine (le scadenze vanno dai dieci anni in avanti) emessi da società private o da enti pubblici con lo scopo di ottenere dei prestiti. Generalmente il prezzo di emissione è inferiore al valore nominale. Lo stacco della cedola può essere semestrale o annuale.
- OBBLIGAZIONI CONVERTIBILI. Sono titoli che danno diritto al possessore di tramutarli, a scadenze stabilite, in azioni della società che ha emesso le obbligazioni stesse. Le scadenze di questi titoli vanno dai 5 anni in avanti.
- AZIONI. Le azioni rappresentano delle quote di capitale della società che le ha emesse. Il possessore di azioni diventa socio della società (che può essere privata o di un ente pubblico) e ha diritto di percepire, a determinate scadenze, un utile. Le azioni vengono, per lo più, liberamente comprate e vendute in appositi luoghi di compra-vendita detti **Borse valori** (in Italia ve ne sono dieci; quella di Milano è di gran lunga la più importante). In Borsa sono oggetto di negoziazione anche i cambi, cioè le divise estere, i titoli di Stato (BOT, CCT, BTP), le Obbligazioni ordinarie e quelle convertibili. I mediatori autorizzati alla negoziazione sono detti *agenti di borsa*. Il controllo e il buon funzionamento della Borsa spetta principalmente alla Consob (Commissione Nazionale per le Società e la Borsa). Non necessariamente un risparmiatore che desidera acquistare o vendere delle azioni deve ricorrere alla Borsa direttamente; è sufficiente che si rechi nella propria banca, all'apposito sportello "titoli". Sarà quest'ultima a fare da mediatore tra il risparmiatore e la Borsa.

Sconto commerciale e cambiale

Un'altra operazione finanziaria è lo **sconto commerciale** che, precisiamo subito, **non** va confuso con lo sconto che abbiamo esaminato parlando di percentuale; lo **sconto** sul prezzo di una merce dovrebbe chiamarsi effettivamente **sconto mercantile**, proprio perché avviene in operazioni di compra-vendita merci. Supponiamo, per esempio, che il signor Montari abbia prestato al signor Zucchetti una certa somma di denaro, a patto che dopo 8 mesi il signor Zucchetti gli restituisca la somma più un certo interesse, calcolato al 5%. Il signor Zucchetti restituisce al signor Montari la somma ricevuta in prestito dopo soli 4 mesi, anziché 8: Zucchetti, allora, avrà pur diritto a uno sconto complessivo sul debito!

Lo sconto a cui ha diritto ogni debitore che estingue il suo debito prima della scadenza si dice **sconto commerciale**.

Il calcolo di questo sconto commerciale avviene, come per un qualsiasi interesse, secondo queste modalità:

- il debito effettivo prende il nome di **valore nominale** e lo indichiamo con D ;
- lo **sconto commerciale** lo indichiamo con S_c ;
- chiamiamo **tasso di sconto** lo sconto effettuato su ogni L 100 e lo indichiamo con r_s ;
- indichiamo con t il **tempo di anticipo** rispetto alla scadenza del debito.

Anche in questo caso avremo quindi tre formule a seconda che il tempo sia indicato in anni, in mesi o in giorni.

$$S_c = \frac{D \cdot r_s \cdot t(a)}{100} \quad S_c = \frac{D \cdot r_s \cdot t(m)}{1200} \quad S_c = \frac{D \cdot r_s \cdot t(d)}{36000}$$

Esempio

Un commerciante, per l'acquisto di una certa merce, ha contratto un debito di L 3 000 000 la cui scadenza è di 1 anno. Riuscendo a saldare il debito dopo solo 5 mesi il commerciante ottiene uno sconto al tasso del 5%. Qual è la somma che dovrà pagare?

Avremo:

$$D = \text{L } 3\,000\,000 \quad r_s = 5\% \quad t = 1 \text{ anno (12 mesi)} - 5 \text{ mesi} = 7 \text{ mesi}$$

per cui:

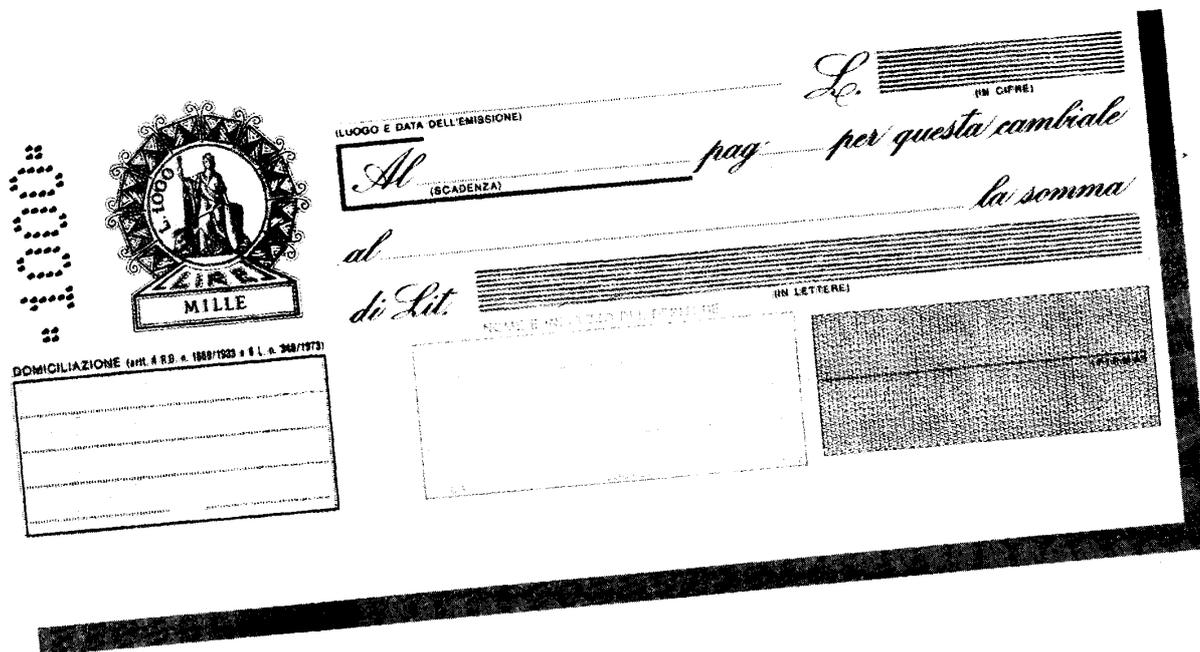
$$S_c = \frac{D \cdot r_s \cdot t(m)}{1200} = \frac{3\,000\,000 \cdot 5 \cdot 7}{1200} = \text{L } 87\,500.$$

Quindi:

$$\text{L } (3\,000\,000 - 87\,500) = \text{L } 2\,912\,500.$$

Generalmente, quando si contrae un debito, il debitore rilascia al creditore una garanzia di pagamento alla data prevista. Una garanzia scritta è la **cambiale**. Essa è un

apposito modulo, soggetto all'imposta di bollo, che si calcola sull'ammontare del debito. Attualmente questa imposta è del 12‰.



In essa, come potete vedere nella Fig. 11, vanno precisate:

la data di emissione (quando si contrae il debito); la somma da pagare, in cifre e in lettere; la scadenza; il nome del creditore; il nome del debitore.

Il debitore, firmando la cambiale, promette (*pagherò*) di pagare l'importo alla scadenza prevista.

Il creditore può riscuotere, prima della scadenza, l'importo di una cambiale rivolgendosi a una banca. La banca anticipa la somma ma, naturalmente, si trattiene un certo importo quale compenso; questo importo viene calcolato sull'ammontare della cifra come uno sconto commerciale.

Esempio

Il signor Pattini, creditore di una cambiale di L 10 000 000 con scadenza 15 maggio 1987, si rivolge alla sua banca perché gli anticipi la somma a oggi 15 gennaio 1987. La Banca esegue l'operazione a un tasso di sconto del 12%; quale somma dà al signor Pattini?

Lo sconto commerciale che la banca applica può essere calcolato con la formula:

$$S_c = \frac{D \cdot r_s \cdot t(m)}{1200} \quad \text{per cui} \quad S_c = \frac{10\,000\,000 \cdot 12 \cdot 4}{1200} = L\ 400\,000.$$

Quindi:

$$L\ (10\,000\,000 - 400\,000) = L\ 9\,600\,000.$$