Elementi di geometria analitica

3.1

Contenuti

- *Il piano cartesiano e i suoi elementi*
- *La retta e la sua equazione*
- *Rette parallele e perpendicolari*
- *Retta passante per due punti*
- *Studio analitico di figure piane*
- *Risoluzione grafica delle equazioni*
- *Le coniche e le loro equazioni*

Competenze

- Sapere le nozioni fondamentali riguardanti il piano cartesiano
- Sapere il concetto di equazione di una retta nel piano cartesiano, le sue proprietà e caratteristiche
- Applicare tali nozioni, concetti, proprietà e caratteristiche allo studio analitico di figure piane e alla risoluzione grafica delle equazioni
- Sapere il concetto di equazione di una conica nel piano cartesiano, le sue proprietà e caratteristiche
- Applicare tali concetti, proprietà e caratteristiche alla rappresentazione grafica delle coniche
- Sapere e usare il linguaggio inerente ai contenuti esposti

Il piano cartesiano e i suoi elementi

Ti ricordi le conclusioni a cui siamo arrivati a proposito del piano cartesiano? Rivediamole rapidamente per poter approfondire le nostre conoscenze.

- Due semirette perpendicolari, nelle quali sono fissati l'origine, il verso e l'unità di misura, si chiamano **assi cartesiani ortogonali** e precisamente **asse delle ascisse** o **asse *x*** quello orizzontale, **asse delle ordinate** o **asse *y*** quello verticale. La loro origine ***O*** è l'**origine degli assi**.
- Due assi cartesiani ortogonali fissati su un piano determinano un **piano cartesiano ortogonale** e costituiscono un **sistema di riferimento cartesiano**.
- I due numeri che individuano la posizione di un punto si chiamano **coordinate cartesiane ortogonali** del punto. Precisamente, il primo, che individua la posizione sull'asse delle ascisse, è l'**ascissa**, il secondo, che individua la posizione sull'asse delle ordinate, è l'**ordinata** del punto. Per indicare quindi un punto qualsiasi del piano scriviamo ***P* (*x*; *y*)** e leggiamo "punto *P* di coordinate *x* e *y*".
  Nell'esempio a fianco (Fig. 1) abbiamo i punti ***A* (+ 3; + 6)** e ***B* (+ 5; + 4)**.

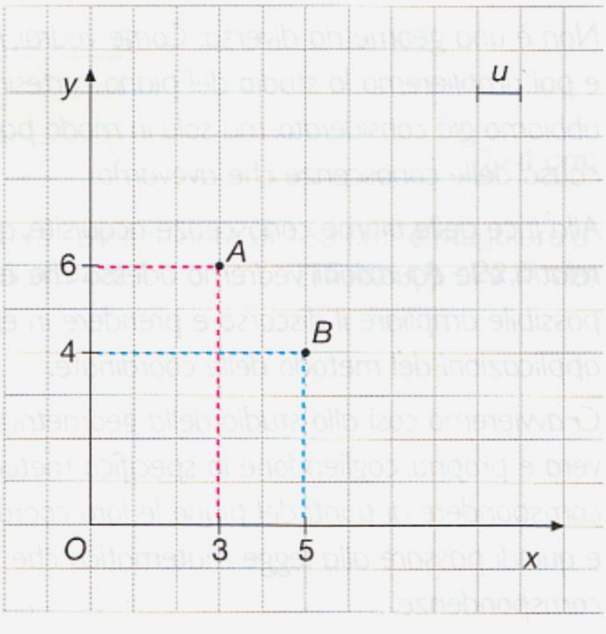


Figura 1

del piano cartesiano, esattamente quella in cui la posizione di un punto è individuata da una coppia di numeri, le coordinate, appartenenti all'insieme N. Le coordinate di un punto, in effetti, possono anche essere numeri relativi qualsiasi; questo ci permetterà dunque adesso di considerare tutto il piano. Vediamo in che modo.

Prolunghiamo gli assi cartesiani*: verso sinistra l'asse x e verso il basso l'asse y.
Sull'asse x avremo il semiasse positivo delle ascisse da O verso destra e il semiasse negativo da O verso sinistra. Sull'asse y avremo il semiasse positivo delle ordinate da O verso l'alto e il semiasse negativo da O verso il basso.
Abbiamo così stabilito un sistema di riferimento cartesiano che ci permette di associare a ogni punto del piano una coppia ordinata di numeri relativi.
Rappresentiamo i punti: $A\,(-3; +2)$, $B\,(+2; +7)$, $C\,(+3; -5)$ e $D\,(-2; -4)$ nel piano cartesiano così ampliato (Fig. 2).

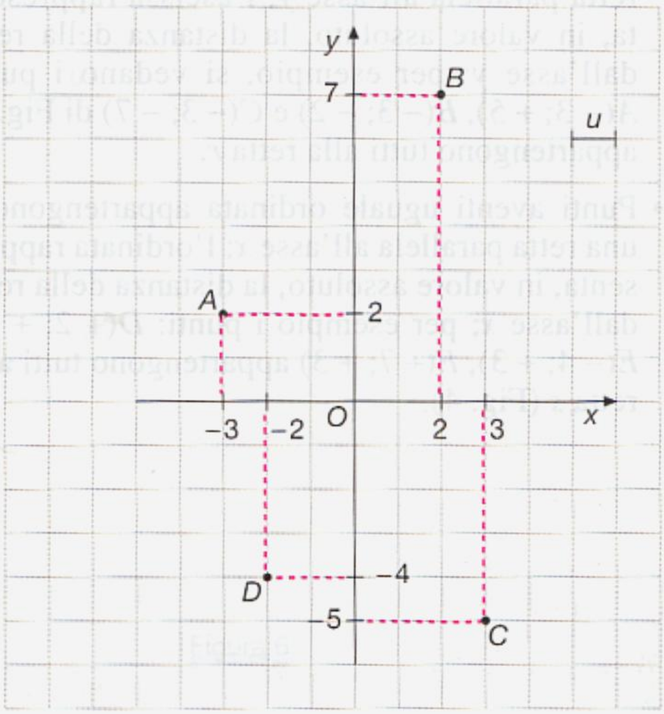


Figura 2

Un piano in cui è stabilito un sistema di riferimento cartesiano si chiama *piano cartesiano*. Esso viene diviso da due assi in quattro parti dette I, II, III e IV *quadrante* (in senso antiorario).

È evidente che (Fig. 3):
- punti che appartengono al primo quadrante hanno ascissa e ordinata positive, per esempio $A(+2; +3)$;
- punti che appartengono al secondo quadrante hanno ascissa negativa e ordinata positiva, per esempio $B(-3; +5)$;
- punti che appartengono al terzo quadrante hanno ascissa e ordinata negative, per esempio $C(-2; -4)$;
- punti che appartengono al quarto quadrante hanno ascissa positiva e ordinata negativa, per esempio $D(+4; -2)$;
- punti appartenenti all'asse x hanno ordinata uguale a zero, per esempio $E(+3; 0)$ e $F(-5; 0)$;
- punti appartenenti all'asse y hanno ascissa uguale a zero, per esempio $G(0; +2)$ e $H(0; -3)$;
- il punto O ha entrambe le coordinate uguali a zero: $O(0; 0)$.

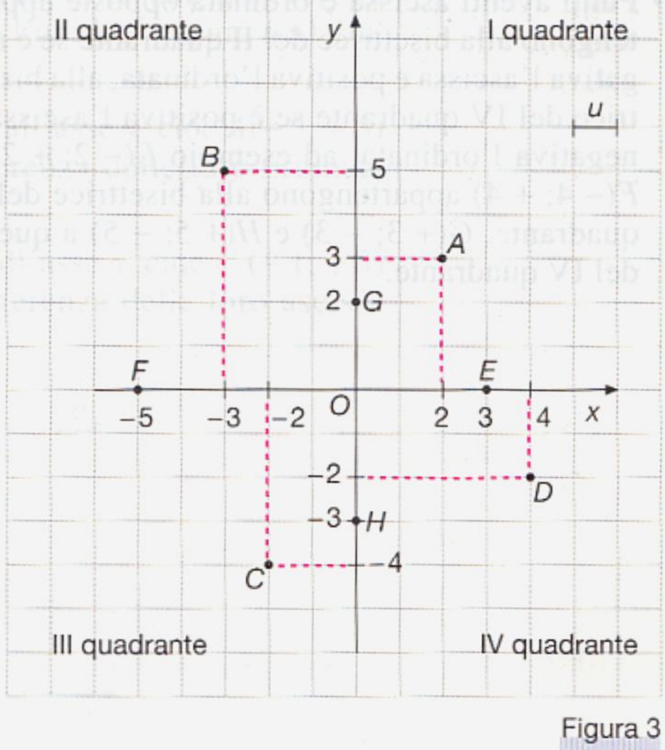


Figura 3

* Ricorda che parleremo sempre di assi cartesiani ortogonali, sistemi di riferimento cartesiani ortogonali e piani cartesiani ortogonali.

Riprendiamo anche alcune considerazioni già fatte estendendole a tutto il piano cartesiano.

- Punti aventi uguale ascissa appartengono a una retta parallela all'asse y; l'ascissa rappresenta, in valore assoluto, la distanza della retta dall'asse y; per esempio, si vedano i punti $A(-3; +5)$, $B(-3; -2)$ e $C(-3; -7)$ di Fig. 4: appartengono tutti alla retta r.
- Punti aventi uguale ordinata appartengono a una retta parallela all'asse x; l'ordinata rappresenta, in valore assoluto, la distanza della retta dall'asse x; per esempio i punti: $D(+2; +3)$, $E(-4; +3)$, $F(+7; +3)$ appartengono tutti alla retta s (Fig. 4).

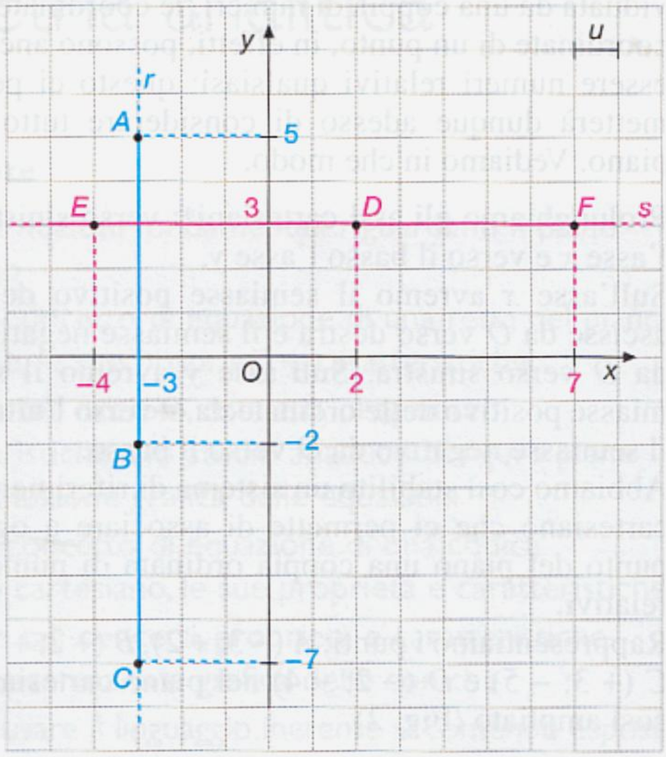


Figura 4

- Punti aventi ascissa e ordinata uguali, entrambe positive, appartengono alla bisettrice del I quadrante; per esempio i punti $A(+3; +3)$ e $B(+5; +5)$ di Fig. 5.
- Punti aventi ascissa e ordinata uguali, entrambe negative, appartengono alla bisettrice del III quadrante, per esempio $C(-2; -2)$ e $D(-4; -4)$.
- Punti aventi ascissa e ordinata opposte appartengono alla bisettrice del II quadrante se è negativa l'ascissa e positiva l'ordinata, alla bisettrice del IV quadrante se è positiva l'ascissa e negativa l'ordinata; ad esempio $E(-2; +2)$ e $F(-4; +4)$ appartengono alla bisettrice del II quadrante, $G(+3; -3)$ e $H(+5; -5)$ a quella del IV quadrante.

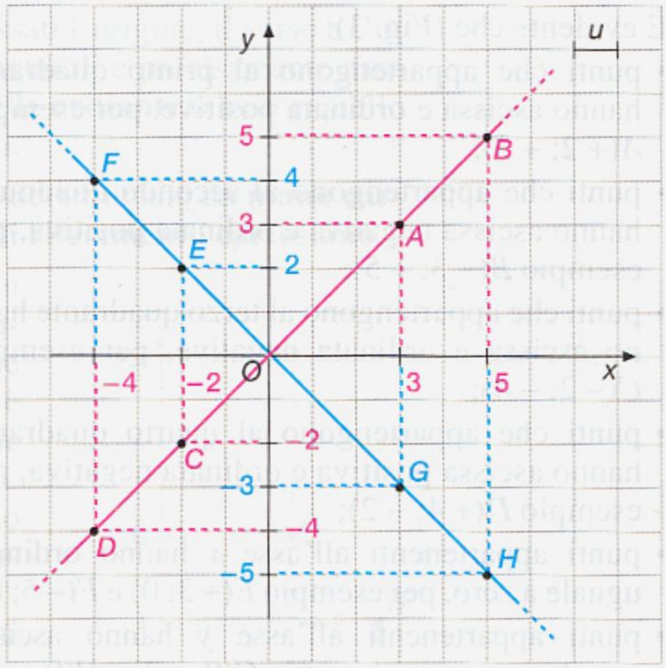


Figura 5

Due punti qualsiasi A e B individuano il segmento AB avente tali punti come estremi. Il punto medio M di tale segmento ha come coordinate le semisomme delle coordinate degli estremi A e B.

Se, ad esempio, abbiamo il segmento AB (Fig. 6) di estremi $A\,(-3; +2)$ e $B(+5; -6)$, il punto medio M sarà:

$$M\left(\frac{(-3)+(+5)}{2}; \frac{(+2)+(-6)}{2}\right), \quad \text{cioè:} \quad \mathbf{M\,(+1; -2)}$$

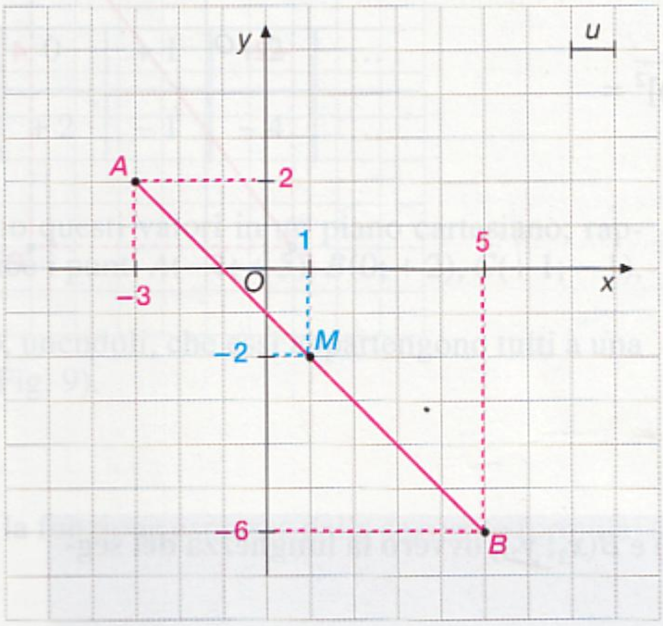


Figura 6

In generale:

Il punto medio di un segmento di estremi $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ ha coordinate uguali alla semisomma delle coordinate di A e B:

$$M\left(\frac{(x_1+x_2)}{2}; \frac{(y_1+y_2)}{2}\right)$$

Dati due punti qualsiasi A e B possiamo calcolare la loro distanza, ovvero la lunghezza del segmento AB. Facendo corrispondere l'unità di misura u a 1 cm, avremo, per esempio, i seguenti casi.

- Se i due punti appartengono ad una retta parallela all'asse y, cioè $A(-3; +5)$ e $B(-3; -2)$, la loro distanza è data dalla differenza delle loro ordinate (Fig. 7): $AB = (+5) - (-2) =$ **7 cm**.
- Se i due punti appartengono a una retta parallela all'asse x, cioè $C\,(-1; +3)$ e $D\,(-7; +3)$, la loro distanza è data dalla differenza delle loro ascisse (Fig. 7): $CD = (-1) - (-7) =$ **6 cm**.

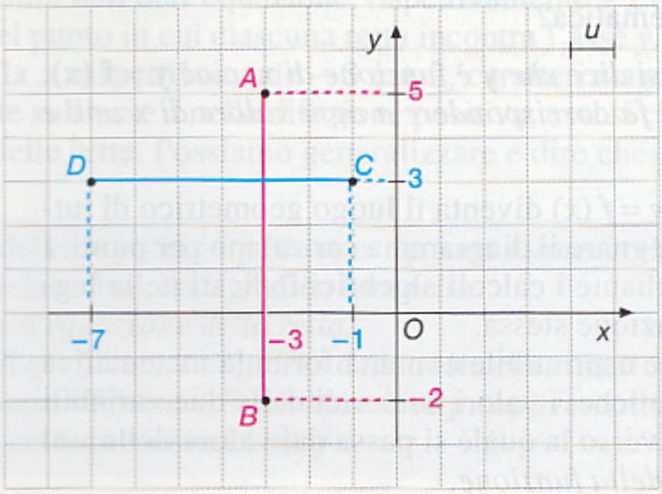


Figura 7

- Se i due punti sono generici nel piano, ad esempio $E(-2; -5)$ e $F(+4; +3)$, la loro distanza è data dall'applicazione del teorema di Pitagora al triangolo EFP (Fig. 8):

$$EF = \sqrt{EP^2 + PF^2} =$$

$$= \sqrt{[(-2)-(+4)]^2 + [(+3)-(-5)]^2} =$$

$$= \sqrt{(-2-4)^2 + (+3+5)^2} =$$

$$= \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = \mathbf{10\ cm}.$$

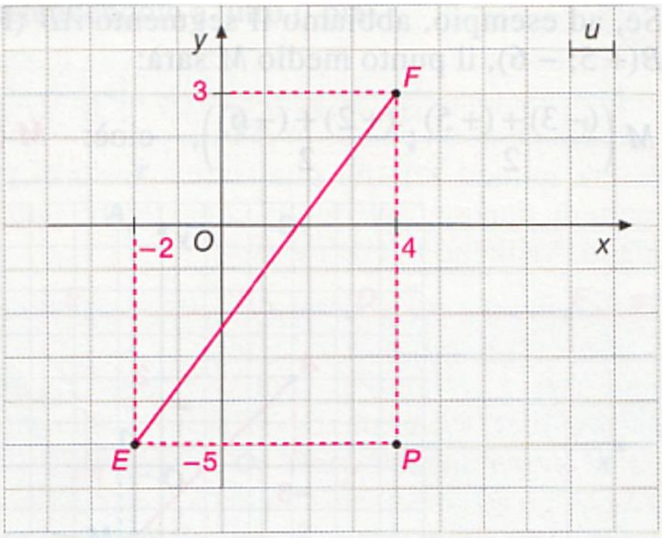


Figura 8

In generale:

La distanza di due punti $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$, ovvero la lunghezza del segmento di estremi A e B, è data:

1) dalla differenza d, in valore assoluto, delle ascisse, se i punti A e B sono allineati parallelamente all'asse x: $d = |x_1 - x_2|$;

2) dalla differenza d, in valore assoluto, delle ordinate, se i punti A e B sono allineati parallelamente all'asse y: $d = |y_1 - y_2|$;

3) dalla formula $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (applicazione del teorema di Pitagora) se i punti A e B sono generici sul piano.

La retta e la sua equazione

Continuiamo il nostro studio della **geometria analitica** addentrandoci nel metodo vero e proprio di tale parte della geometria, cioè nella possibilità di determinare algebricamente la legge matematica che descrive la corrispondenza fra i punti del piano e le loro coordinate.
Ricordi il concetto di funzione matematica?

Date due grandezze variabili x *e* y *si dice che* y *è funzione di* x, *cioè* **y = f (x)**, *se esiste una legge matematica che fa corrispondere a ogni valore di* x *uno e un solo valore di* y.

Nel piano cartesiano una funzione $y = f(x)$ diventa il luogo geometrico di tutti i punti $(x; y)$ di cui è possibile disegnare il diagramma cartesiano per punti. I valori di tali punti si ottengono mediante i calcoli algebrici indicati nella legge matematica che determina la funzione stessa.
Ogni funzione matematica è dunque esprimibile con una formula matematica che lega, con sole operazioni aritmetiche, i valori numerici delle due variabili x ed y. La formula matematica attraverso la quale si passa dal valore della x al valore della y si chiama *equazione della funzione*.

- Consideriamo la funzione espressa dalla seguente formula:

$y = -3x + 2$

e completiamo la tabella dei valori assegnando arbitrariamente un valore a x e calcolando il corrispondente valore di y:

x	-1	0	$+1$	$+2$	…
y	$+5$	$+2$	-1	-4	…

Rappresentiamo questi valori in un piano cartesiano; rappresentiamo cioè i punti $A(-1; +5)$, $B(0; +2)$, $C(+1; -1)$, $D(+2; -4)$…

Ci accorgiamo, unendoli, che essi appartengono tutti a una stessa retta r (Fig. 9).

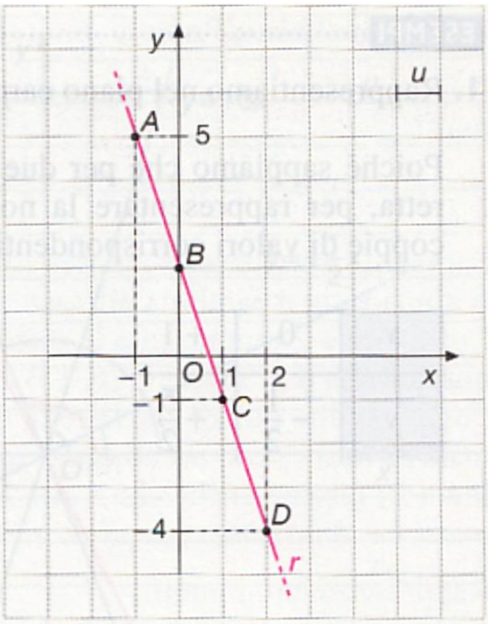


Figura 9

- Consideriamo la funzione espressa dalla seguente formula:

$y = 2x - 3$

e compiliamo la tabella dei valori:

x	-1	0	$+1$	…
y	-5	-3	-1	…

Rappresentiamo sul piano cartesiano i punti $A(-1; -5)$, $B(0; -3)$, $C(+1; -1)$, …

Anche questi appartengono tutti a una stessa retta s (Fig. 10).

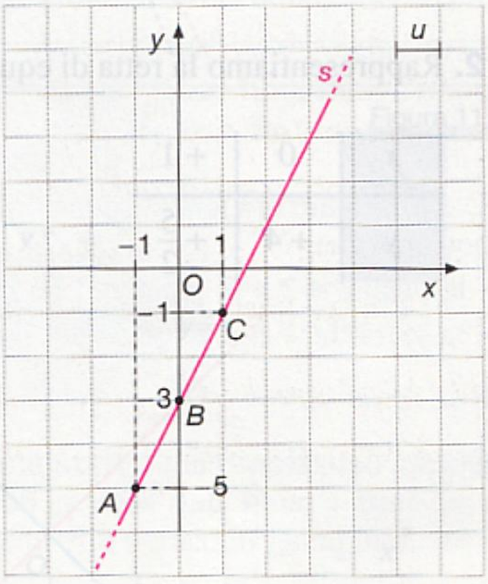


Figura 10

Diremo che una funzione espressa da una equazione del tipo di quelle ora studiate ha come grafico cartesiano una *retta*.

Osserviamo le due equazioni $y = -3x + 2$ e $y = +2x - 3$ e i rispettivi grafici: notiamo che i *termini noti* dell'equazione, rispettivamente $+2$ e -3, rappresentano l'ordinata del punto in cui ciascuna retta incontra l'asse y.
I coefficienti della x, rispettivamente -3 e $+2$, caratterizzano invece l'inclinazione delle rette sull'asse x nella direzione positiva; essi si chiamano **coefficienti angolari** delle rette. Possiamo generalizzare e dire che:

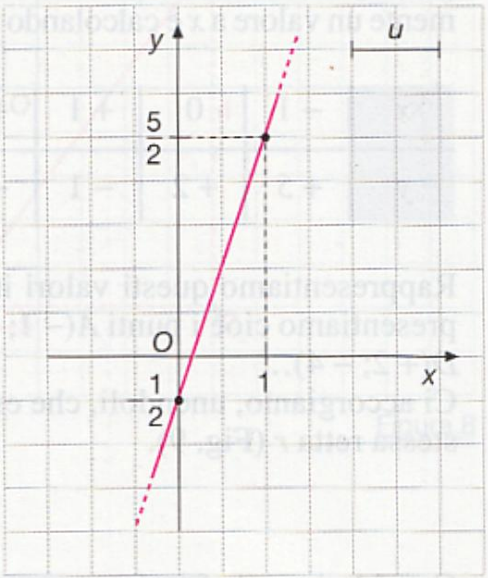
Un'equazione del tipo $y = mx + p$ (dove m e p sono numeri relativi qualsiasi) nel piano cartesiano ha come grafico una *retta*.
$y = mx + p$ si dice *equazione della retta*.
Il termine m è il *coefficiente angolare* della retta che caratterizza la sua inclinazione rispetto all'asse x; il *termine noto* p rappresenta l'ordinata del punto in cui la retta incontra l'asse y.

ESEMPI

1. Rappresentiamo nel piano cartesiano la retta di equazione $y = +3x - \frac{1}{2}$.

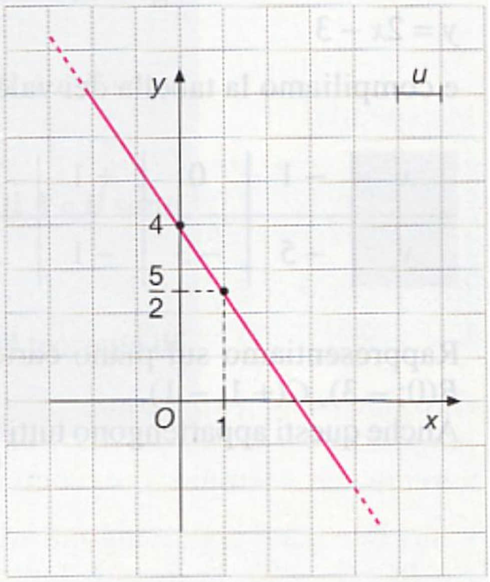
Poiché sappiamo che per due punti passa una e una sola retta, per rappresentare la nostra retta bastano solo due coppie di valori corrispondenti:

x	0	$+1$
y	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{5}{2}$



2. Rappresentiamo la retta di equazione $y = -\frac{3}{2}x + 4$.

x	0	$+1$
y	$+4$	$+\frac{5}{2}$



Rette particolari

Rette passanti per l'origine degli assi

Data l'equazione di una retta generica $y = mx + p$, sappiamo che il termine noto p indica l'ordinata del punto in cui la retta incontra l'asse y; quindi se $p = 0$, la retta incontra l'asse y nel punto di coordinate $(0; 0)$, cioè l'origine degli assi.

Diremo che $y = mx$ è l'equazione di una *retta passante per l'origine degli assi*.

Rappresentiamo nel piano cartesiano le rette di equazione:

$y = +3x \qquad y = -2x$

$y = +\frac{1}{2}x \qquad y = -\frac{5}{2}x$

che sono tutte rette passanti per l'origine; in base al coefficiente angolare vediamo che varia la loro inclinazione sull'asse x.

Notiamo che (Fig. 11):

- *se il coefficiente angolare è positivo*, $y = +3x$ e $y = +\frac{1}{2}x$, la retta giace nel I e III quadrante, e l'angolo che esse formano con l'asse x è un angolo acuto;
- *se è negativo*, $y = -2x$ e $y = -\frac{5}{2}x$, la retta giace nel II e IV quadrante, e l'angolo che esse formano con l'asse x è un angolo ottuso.

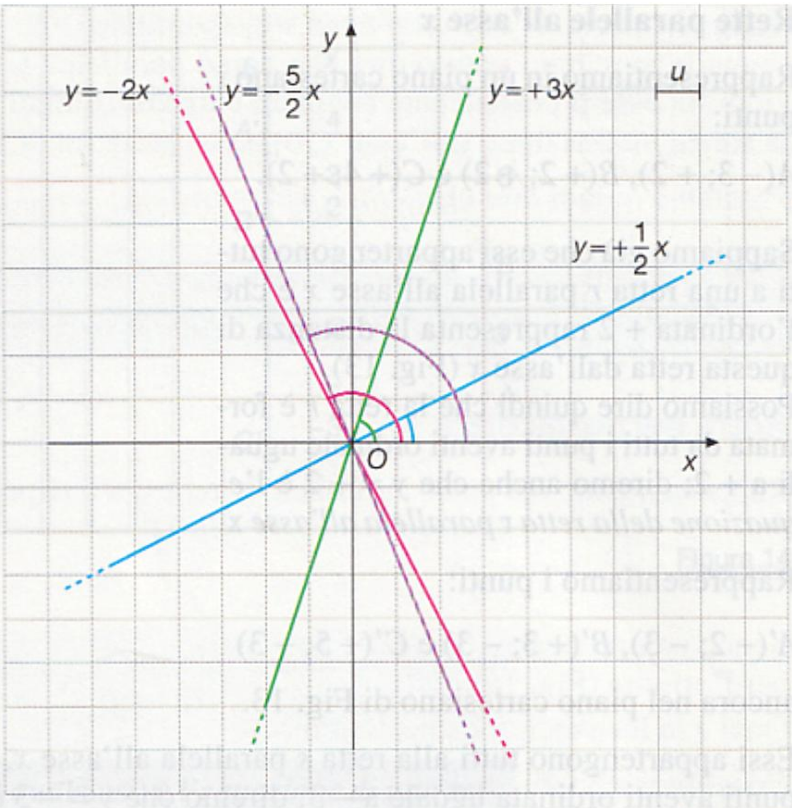


Figura 11

Rappresentiamo le rette di equazioni:

$y = x$ e $y = -x$.

Prima ancora di disegnarle possiamo dire che entrambe passano per l'origine; la prima giace nel I e III quadrante e la seconda nel II e IV quadrante (Fig. 12).

Notiamo che le due equazioni rappresentano rispettivamente la *bisettrice del I e III quadrante* e la *bisettrice del II e IV quadrante*.

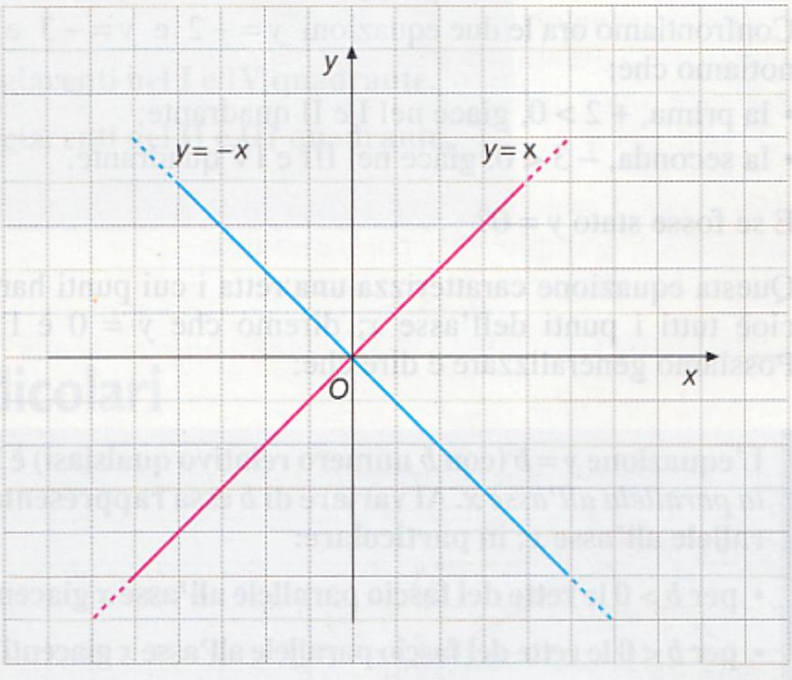


Figura 12

Possiamo generalizzare e dire che:

L'equazione $y = mx$ (con m un numero relativo qualsiasi) è l'equazione di una *retta passante per l'origine*. Al variare di m essa rappresenta il fascio di rette di centro O, in particolare:

- **per $m > 0$ le rette del fascio giacenti nel I e III quadrante,**
- **per $m < 0$ le rette del fascio giacenti nel II e IV quadrante,**
- **per $m = 1$ la retta bisettrice del I e III quadrante,**
- **per $m = -1$ la retta bisettrice del II e IV quadrante.**

Rette parallele all'asse *x*

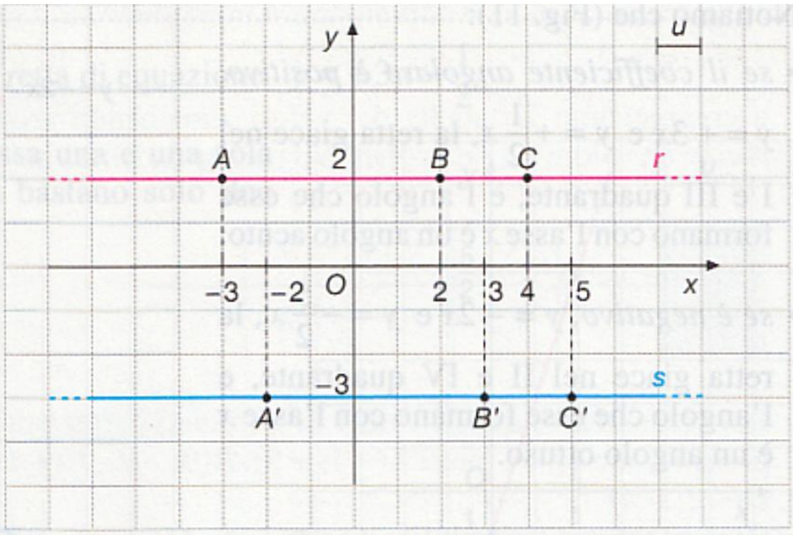


Figura 13

Rappresentiamo in un piano cartesiano i punti:

$A(-3; +2)$, $B(+2; +2)$ e $C(+4; +2)$.

Sappiamo già che essi appartengono tutti a una retta r parallela all'asse x e che l'ordinata $+2$ rappresenta la distanza di questa retta dall'asse x (Fig. 13).
Possiamo dire quindi che la retta r è formata da tutti i punti aventi ordinate uguali a $+2$; diremo anche che $y = +2$ è l'*equazione della retta* r *parallela all'asse* x.

Rappresentiamo i punti:

$A'(-2; -3)$, $B'(+3; -3)$ e $C'(+5; -3)$

ancora nel piano cartesiano di Fig. 13.

Essi appartengono tutti alla retta s parallela all'asse x, caratterizzata da tutti i punti aventi ordinata uguale a -3; diremo che $y = -3$ è l'*equazione della retta* s *parallela all'asse* x.

Confrontiamo ora le due equazioni $y = +2$ e $y = -3$ e le rispettive rette r ed s; notiamo che:
- la prima, $+2 > 0$, giace nel I e II quadrante;
- la seconda, $-3 < 0$, giace nel III e IV quadrante.

E se fosse stato $y = 0$?

Questa equazione caratterizza una retta i cui punti hanno tutti ordinata nulla, cioè tutti i punti dell'asse x; diremo che $y = 0$ è l'*equazione dell'asse x*. Possiamo generalizzare e dire che:

L'equazione $y = b$ (con b numero relativo qualsiasi) è l'equazione di una *retta parallela all'asse x*. Al variare di b essa rappresenta un fascio di rette parallele all'asse x; in particolare:

- **per $b > 0$ le rette del fascio parallele all'asse x giacenti nel I e II quadrante,**
- **per $b < 0$ le rette del fascio parallele all'asse x giacenti nel III e IV quadrante,**
- **per $b = 0$ l'asse x.**

Rette parallele all'asse *y*

Rappresentiamo in un riferimento di assi cartesiani i seguenti gruppi di punti:

$A(+3; -2)$, $B(+3; +1)$ e $C(+3; +3)$;
$A'(-2; +4)$, $B'(-2; +2)$ e $C'(-2; -3)$.

Sappiamo già che essi appartengono alle rette a e b parallele all'asse y (Fig. 14).
La retta a è formata da tutti i punti aventi ascissa uguale a $+3$: diremo che $x = +3$ è l'*equazione della retta* a *parallela all'asse* y.

La retta b è formata da tutti i punti aventi ascissa uguale a -2: diremo che $x = -2$ è l'*equazione della retta* b *parallela all'asse* y.

Confrontiamo le due equazioni $x = +3$ e $x = -2$ e le rispettive rette a e b:

- la prima, $+3 > 0$, giace nel I e IV quadrante;
- la seconda, $-2 < 0$, giace nel II e III quadrante.

E se fosse stato $x = 0$?
Questa equazione caratterizza una retta i cui punti hanno tutti ascissa nulla, cioè tutti i punti dell'asse y; diremo che $x = 0$ è l'*equazione dell'asse y*.

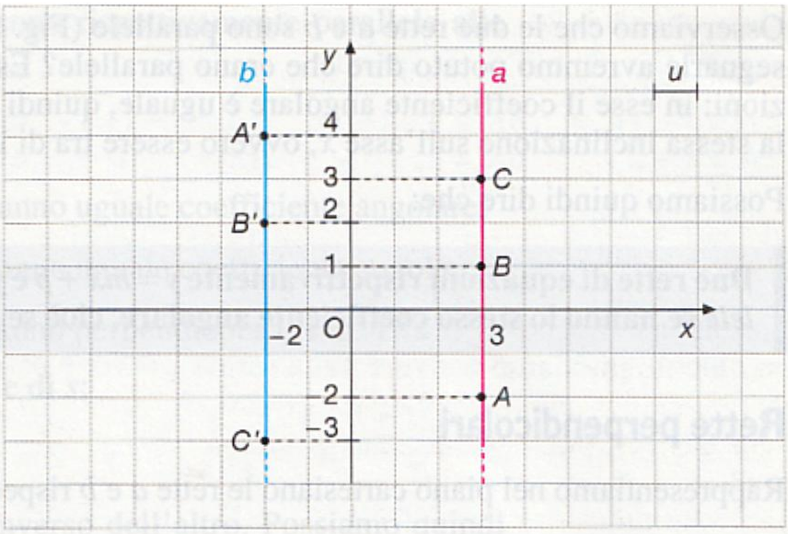


Figura 14

Possiamo generalizzare e dire:

L'equazione $x = a$ (con a numero relativo qualsiasi) è *l'equazione di una retta parallela all'asse y*.
Al variare di a essa rappresenta un fascio di rette parallele all'asse y; in particolare:

- **per $a > 0$ le rette del fascio // all'asse y giacenti nel I e IV quadrante,**
- **per $a < 0$ le rette del fascio // all'asse y giacenti nel II e III quadrante,**
- **per $a = 0$ l'asse y.**

Rette parallele e perpendicolari

Rette parallele

Rappresentiamo, in un piano cartesiano, le due rette a e b rispettivamente di equazioni:

$$y = +\frac{1}{2}x - 2 \quad \text{e} \quad y = +\frac{1}{2}x + 3$$

per le quali avremo:

x	0	$+1$
y	-2	$-\frac{3}{2}$

(retta a)

x	0	$+1$
y	$+3$	$+\frac{7}{2}$

(retta b)

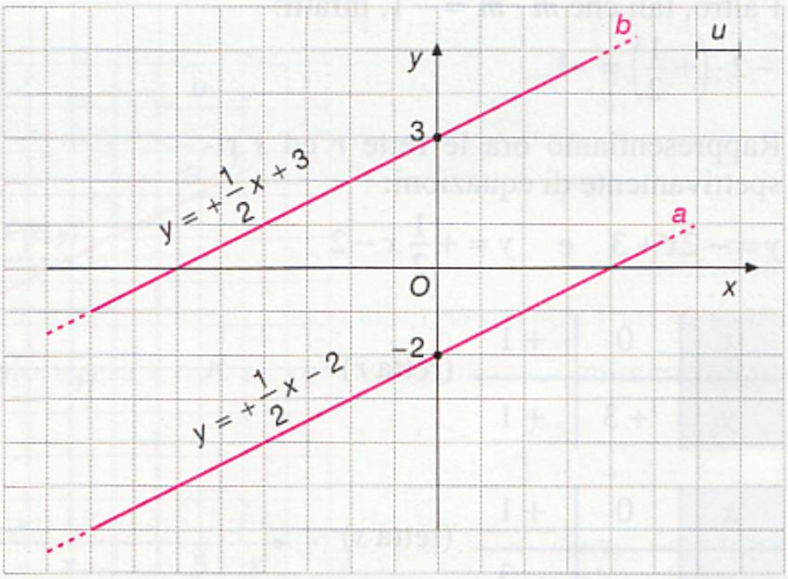


Figura 15

Osserviamo che le due rette a e b sono parallele (Fig. 15). Prima ancora di disegnarle avremmo potuto dire che erano parallele? Esaminiamo le due equazioni: in esse il coefficiente angolare è uguale, quindi le rette dovevano avere la stessa inclinazione sull'asse x, ovvero essere tra di loro parallele.

Possiamo quindi dire che:

> **Due rette di equazioni rispettivamente $y = mx + p$ e $y = m'x + p'$ sono *parallele* se hanno lo stesso coefficiente angolare, cioè se e solo se $m = m'$.**

Rette perpendicolari

Rappresentiamo nel piano cartesiano le rette a e b rispettivamente di equazioni:

$$y = -2x \quad \text{e} \quad y = +\frac{1}{2}x$$

Sono, naturalmente, due rette passanti per l'origine (Fig. 16).

Qual è la loro reciproca posizione?

Consideriamo i due punti:
$A(-2; +4) \in a$ e $B(+4; +2) \in b$ e i due triangoli AKO e OHB.

Essi sono congruenti per il I criterio di congruenza, infatti $AK \cong BH$, $KO \cong OH$ e $\widehat{K} = \widehat{H} = 90°$, quindi:
$A\widehat{O}K \cong B\widehat{O}H$.

Ma allora l'angolo formato dalle due rette a e b è ampio 90°; possiamo dire che le due rette sono perpendicolari.

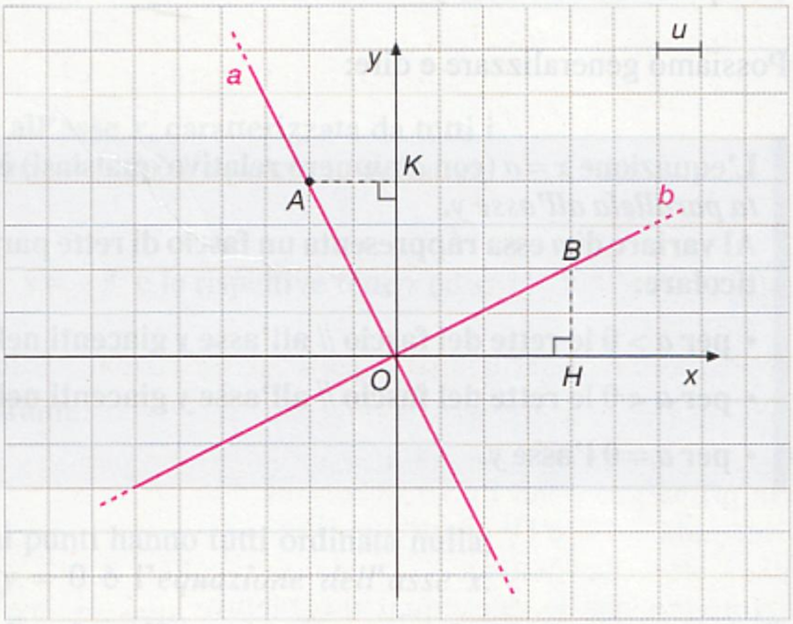


Figura 16

Osserviamo i due coefficienti angolari

$$m = -2 \quad \text{e} \quad m' = +\frac{1}{2}$$

Essi sono uno l'opposto e l'inverso dell'altro, tali che $\boldsymbol{m \cdot m' = -1}$, infatti:

$$-2 \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Rappresentiamo ora le rette r ed s rispettivamente di equazioni:

$$y = -2x + 3 \quad \text{e} \quad y = +\frac{1}{2}x - 2$$

(retta r)

x	0	+1
y	+3	+1

(retta s)

x	0	+1
y	−2	$-\frac{3}{2}$

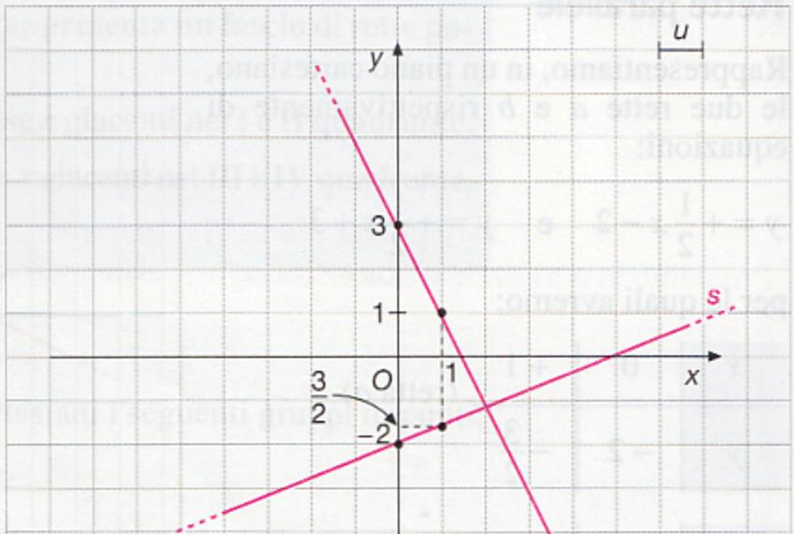


Figura 17

Qual è la loro reciproca posizione? Esse sono rispettivamente parallele alle due rette a e b della Fig. 16;

$r \parallel a$ e $s \parallel b$.

Infatti:

$r \rightarrow y = -2x + 3$ e $a \rightarrow y = -2x$ hanno uguale coefficiente angolare;

$s \rightarrow y = +\frac{1}{2}x - 2$ e $b \rightarrow y = +\frac{1}{2}x$ hanno uguale coefficiente angolare.

Essendo a e b perpendicolari, anche r ed s sono perpendicolari (Fig.17).

Osserviamo i due coefficienti angolari di r e di s:

$m = -2$ e $m' = +\frac{1}{2}$.

Anche questi risultano uno l'opposto e l'inverso dell'altro. Possiamo quindi generalizzare e dire che:

Due rette di equazioni $y = mx + p$ e $y = m'x + p'$ sono *perpendicolari* se e solo se i due coefficienti angolari sono uno l'opposto e l'inverso dell'altro, tali cioè che $m \cdot m' = -1$.

Retta passante per due punti

Vogliamo affrontare adesso il seguente problema: *"Dati due punti* A *e* B *su un piano cartesiano, scrivere l'equazione della retta che passa per questi due punti"*.

Disegniamo in un piano cartesiano i seguenti punti:

$A(+1; +2)$ e $B(+5; +4)$

e la retta r che li unisce. Indichiamo con $P(x; y)$ un punto qualsiasi della retta r. I due triangoli PHA e BKA (Fig. 18) sono simili, avranno quindi i lati omologhi in rapporto costante; possiamo allora scrivere:

$$\frac{PH}{BK} = \frac{HA}{KA}$$

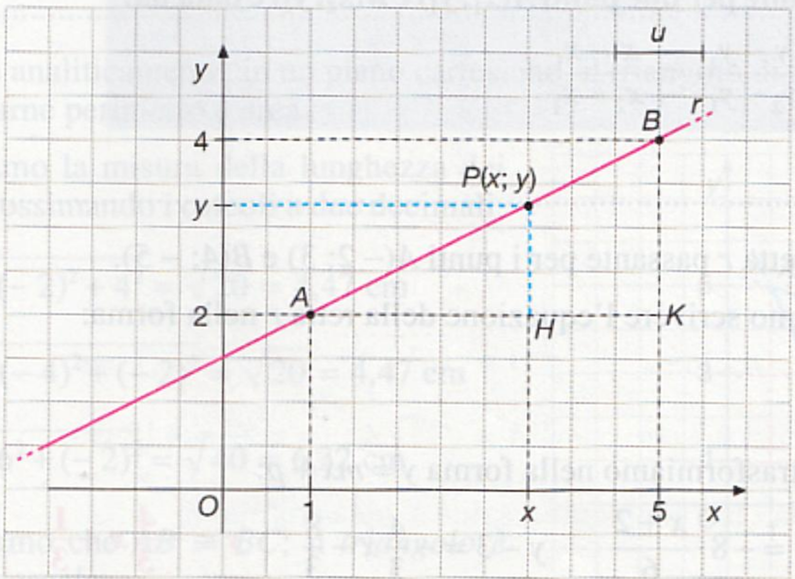


Figura 18

Sostituiamo nella relazione precedente i valori di PH, BK, HA e KA osservando che $H(x;\ 2)$ e $K(5;\ 2)$, quindi:

$$PH = y-(+2),\quad BK = 4-(+2),\quad HA = x-(+1)\quad \text{e}\quad KA = 5-(+1);$$
$$PH = y-2,\quad BK = 2,\quad HA = x-1\quad \text{e}\quad KA = 4$$

da cui: $\dfrac{y-2}{4-2} = \dfrac{x-1}{5-1}$

Questa è l'equazione della retta r passante per i punti A e B che, con opportuni calcoli, possiamo scrivere nella forma $y = mx + p$:

$$\frac{y-2}{2} = \frac{x-1}{4} \qquad \cancel{2}^{1} \cdot \frac{y-2}{\cancel{2}_{1}} = \cancel{2}^{1} \cdot \frac{x-1}{\cancel{4}_{2}} \qquad y-2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \qquad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Vogliamo ora verificare che l'equazione $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ è proprio l'equazione della retta r passante per A e B? Basta sostituire a x e y i valori del punto A e del punto B:

$$A(1;\ 2) \rightarrow 2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \qquad 2 = \frac{4}{2} \qquad 2 = 2 \rightarrow A \in r$$

$$B(5;\ 4) \rightarrow 4 = \frac{1}{2}\cdot 5 + \frac{3}{2} \qquad 4 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \qquad 4 = \frac{8}{2} \qquad 4 = 4 \rightarrow B \in r$$

Riflettiamo sul metodo usato per arrivare all'equazione della retta r:

$$\frac{y-2}{4-2} = \frac{x-1}{5-1}$$

1) Il numeratore della prima frazione è la differenza fra l'ordinata di un punto generico P e l'ordinata del punto A, il suo denominatore è la differenza delle ordinate dei punti B e A.

2) Il numeratore della seconda frazione è la differenza fra l'ascissa di un punto generico P e l'ascissa del punto A, il suo denominatore è la differenza delle ascisse dei punti B e A.

Possiamo quindi generalizzare e dire che:

L'equazione della retta passante per due punti $A(x_1;\ y_1)$ e $B(x_2;\ y_2)$ è data da:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

ESEMPIO

- Scrivere l'equazione della retta r passante per i punti $A(-2;\ 3)$ e $B(4;\ -5)$.

  Per quanto ora visto, possiamo scrivere l'equazione della retta r nella forma:

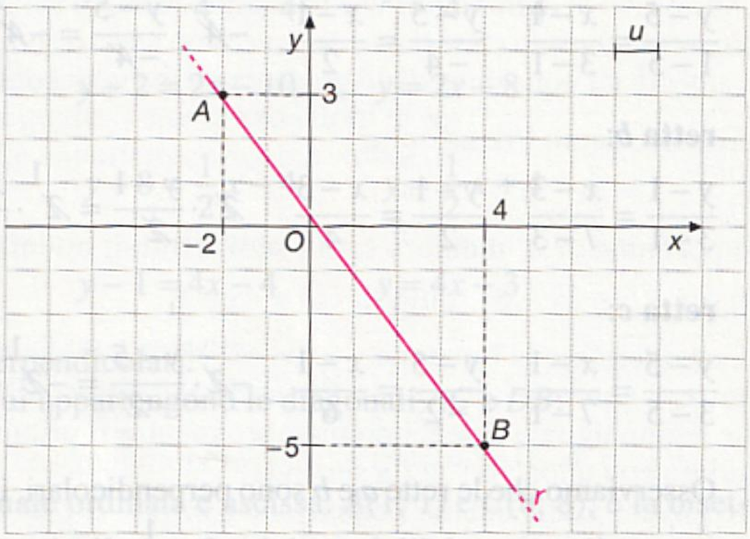
  $$\frac{y-3}{-5-3} = \frac{x+2}{4+2}$$

  che, con opportuni calcoli, trasformiamo nella forma $y = mx + p$:

  $$\frac{y-3}{-8} = \frac{x+2}{6} \qquad -8\cdot\frac{y-3}{-8} = -8\cdot\frac{x+2}{6} \qquad y-3 = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3} \qquad \boldsymbol{y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}}$$

Rappresentiamo la retta $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ nel piano cartesiano

x	0	1
y	$\frac{1}{3}$	-1



e verifichiamo che è proprio l'equazione della retta r passante per A e B sostituendo a essa le coordinate di A e di B:

$$\begin{cases} 3 = -\frac{4}{3}\cdot(-2) + \frac{1}{3} \\ 3 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \quad 3 = 3 \rightarrow A \in r \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 = -\frac{4}{3}\cdot(+4) + \frac{1}{3} \\ -5 = -\frac{16}{3} + \frac{1}{3} \quad -5 = -5 \rightarrow B \in r \end{cases}$$

Studio analitico di figure piane

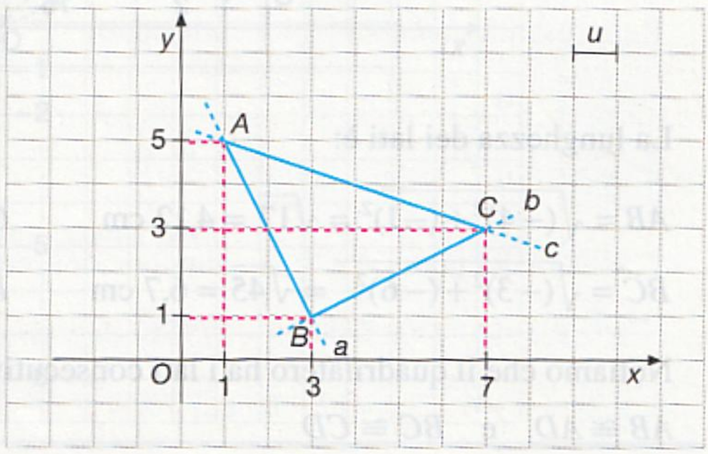
Studiare analiticamente una figura piana vuol dire calcolare la lunghezza dei suoi vari elementi (lati, apotemi, diagonali, altezze,...) e scrivere le equazioni delle rette a cui appartengono questi stessi elementi.
Attraverso le proprietà della retta che abbiamo adesso esaminato, potremo poi stabilire particolari proprietà della figura e la potremo classificare.

Vediamo come procedere nella pratica attraverso alcuni esempi.

ESEMPI

1. Studiare analiticamente, in un piano cartesiano, il triangolo di vertici $A(1; 5)$, $B(3; 1)$ e $C(7; 3)$ e calcolarne perimetro e area.

Calcoliamo la misura della lunghezza dei lati approssimando i calcoli a due decimali:



$AB = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 4{,}47$ cm

$BC = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 4{,}47$ cm

$CA = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 6{,}32$ cm

Osserviamo che $AB \cong BC$: il *triangolo è quindi isoscele*.

Determiniamo ora l'equazione delle rette a cui appartengono i lati:

retta *a*:

$$\frac{y-5}{1-5}=\frac{x-1}{3-1} \qquad \frac{y-5}{-4}=\frac{x-1}{2} \qquad \cancel{-4}\cdot\frac{y-5}{\cancel{-4}}=-\cancel{4}^{2}\cdot\frac{x-1}{\cancel{2}_{1}} \qquad y-5=-2x+2 \qquad y=-2x+7$$

retta *b*:

$$\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-3}{7-3} \qquad \frac{y-1}{2}=\frac{x-3}{4} \qquad \cancel{2}\cdot\frac{y-1}{\cancel{2}}=\cancel{2}^{1}\cdot\frac{x-3}{\cancel{4}_{2}} \qquad y-1=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \qquad y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

retta *c*:

$$\frac{y-5}{3-5}=\frac{x-1}{7-1} \qquad \frac{y-5}{-2}=\frac{x-1}{6} \qquad -\cancel{2}\cdot\frac{y-5}{-\cancel{2}}=-\cancel{2}^{1}\cdot\frac{x-1}{\cancel{6}_{3}} \qquad y-5=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \qquad y=-\frac{1}{3}x+\frac{16}{3}$$

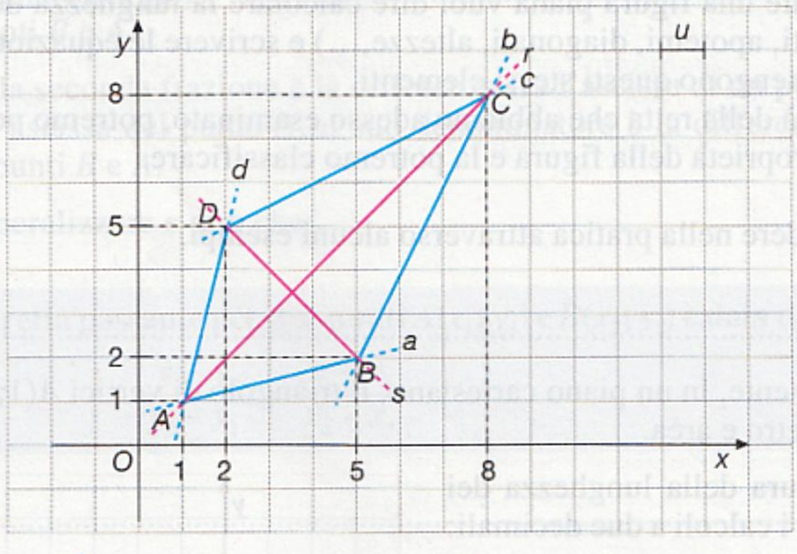
Osserviamo che le rette a e b sono perpendicolari, i loro coefficienti angolari sono infatti uno l'inverso e l'opposto dell'altro, cioè -2 e $\frac{1}{2}$. *Il triangolo è quindi isoscele e anche rettangolo in* $\widehat{B}$.

Calcoliamo il perimetro e l'area:

$p = AB + BC + CA$ da cui $p = (4{,}47 + 4{,}47 + 6{,}32) =$ **15,26 cm**

$\text{A} = \frac{C\cdot c}{2} = \frac{4{,}47\cdot 4{,}47}{2} =$ **9,990 cm²**

2. Studiare analiticamente il quadrilatero di vertici $A(1; 1)$, $B(5; 2)$, $C(8; 8)$ e $D(2; 5)$. Calcolare inoltre il perimetro e l'area del quadrilatero e le coordinate dei vertici del quadrilatero simmetrico a quello dato rispetto all'origine.



La lunghezza dei lati è:

$AB = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17} = 4{,}12$ cm $\qquad CD = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 6{,}7$ cm

$BC = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{45} = 6{,}7$ cm $\qquad DA = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} = 4{,}12$ cm

Notiamo che il quadrilatero ha i lati consecutivi a due a due congruenti:

$AB \cong AD$ e $BC \cong CD$

Equazione delle rette a cui appartengono i lati:

retta a: $\dfrac{y-1}{2-1}=\dfrac{x-1}{5-1} \qquad \dfrac{y-1}{1}=\dfrac{x-1}{4} \qquad y-1=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4} \qquad y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$

retta b: $\dfrac{y-2}{8-2}=\dfrac{x-5}{8-5} \qquad \dfrac{y-2}{6}=\dfrac{x-5}{3} \qquad y-2=2x-10 \qquad y=2x-8$

retta c: $\dfrac{y-8}{5-8}=\dfrac{x-8}{2-8} \qquad \dfrac{y-8}{-3}=\dfrac{x-8}{-6} \qquad y-8=\dfrac{1}{2}x-4 \qquad y=\dfrac{1}{2}x+4$

retta d: $\dfrac{y-1}{5-1}=\dfrac{x-1}{2-1} \qquad \dfrac{y-1}{4}=\dfrac{x-1}{1} \qquad y-1=4x-4 \qquad y=4x-3$

Le quattro rette non sono né parallele né perpendicolari.
Scriviamo l'equazione delle rette r ed s a cui appartengono le diagonali AC e DB:

retta r: $y = x$

essa è formata da punti aventi ciascuno uguale ordinata e ascissa: $A(1;\ 1)$ e $C(8;8)$; è la bisettrice del I e III quadrante:

retta s: $\dfrac{y-2}{5-2}=\dfrac{x-5}{2-5} \qquad \dfrac{y-2}{3}=\dfrac{x-5}{-3} \qquad y-2=-x+5 \qquad y=-x+7$

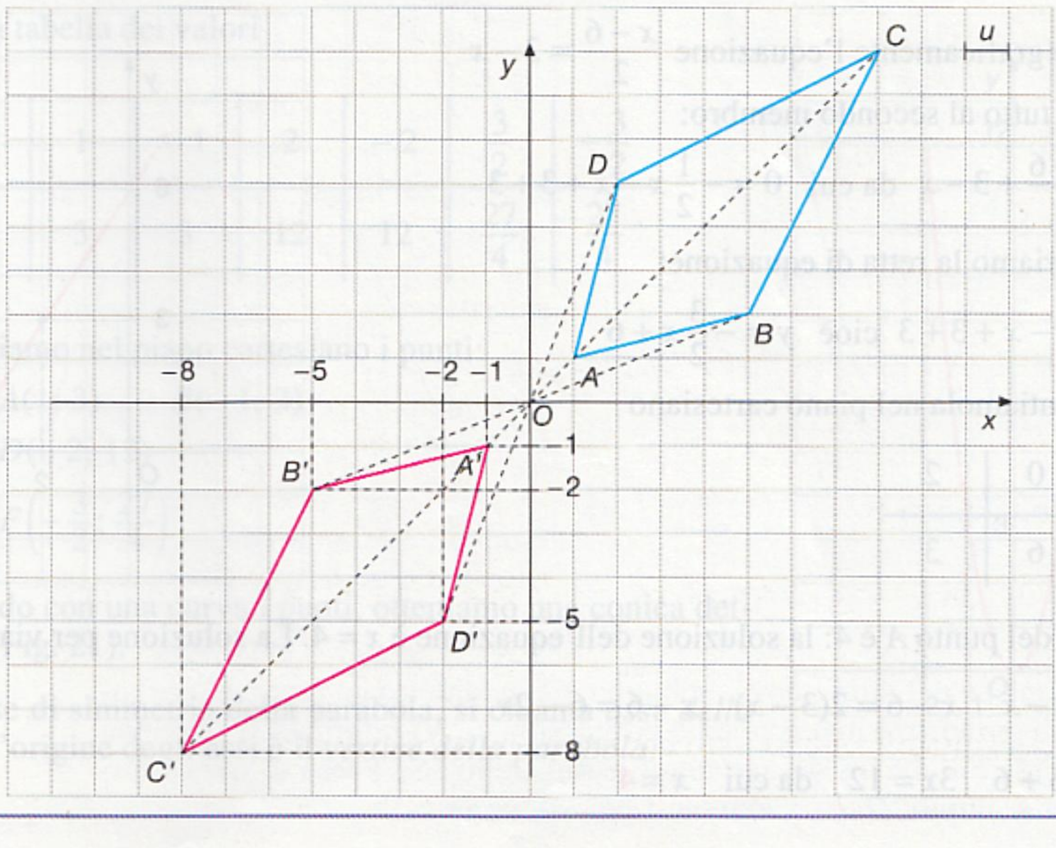
Le rette r ed s sono perpendicolari, i loro coefficienti angolari sono uno l'inverso e l'opposto dell'altro ($+1$ e -1); si tratta di un particolare quadrilatero a diagonali perpendicolari detto *deltoide*.
Determiniamo quindi perimetro e area del quadrilatero:

$p = AB + BC + CD + DA$ da cui $p = (4{,}12 + 6{,}7 + 4{,}12 + 6{,}7)\ \text{cm} = 21{,}64\ \text{cm}$

$AC = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2} = \sqrt{98} = 9{,}89\ \text{cm}$ e $DB = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 4{,}24\ \text{cm}$

$$A = \frac{AC \cdot DB}{2} = \frac{9{,}89 \cdot 4{,}24}{2}\ \text{cm}^2 = 20{,}96\ \text{cm}^2$$

Coordinate dei vertici del quadrilatero, simmetrico rispetto all'origine:
$A'(-1;-1) \quad B'(-5;-2) \quad C'(-8;-8) \quad D'(-2;-5)$



Risoluzione grafica delle equazioni

Attraverso le conoscenze che abbiamo acquisito sulla retta e sulla sua rappresentazione nel piano cartesiano, osserveremo adesso come è possibile risolvere graficamente un'equazione di 1° grado a una incognita del tipo che abbiamo studiato.

Consideriamo l'equazione:

$-x+5=3x-3$

e portiamo al 2° membro tutti i suoi termini; otteniamo:

$0=x-5+3x-3$ quindi: $0=4x-8$

Consideriamo la funzione $y=4x-8$, che è l'equazione di una retta, e confrontiamola con l'equazione ora semplificata: esse hanno uguale il secondo membro mentre il primo è 0 nella prima equazione e y nella seconda.
Risolvere graficamente l'equazione $0=4x-8$ vuol dire allora trovare l'ascissa x del punto della retta $y=4x-8$ la cui ordinata y è zero, cioè il punto in cui la retta $y=4x-8$ incontra l'asse x.

Rappresentiamo la retta $y=4x-8$ nel piano cartesiano (Fig. 19).
Il punto in cui questa retta incontra l'asse x è $A(2;0)$; l'ascissa di questo punto è la soluzione della nostra equazione: $x=2$.

Controlliamo per via algebrica:

$-x+5=3x-3 \qquad -x-3x=-5-3$

$-4x=-8 \qquad x=\dfrac{-\cancel{8}^{\,2}}{-\cancel{4}_{\,1}}=2$

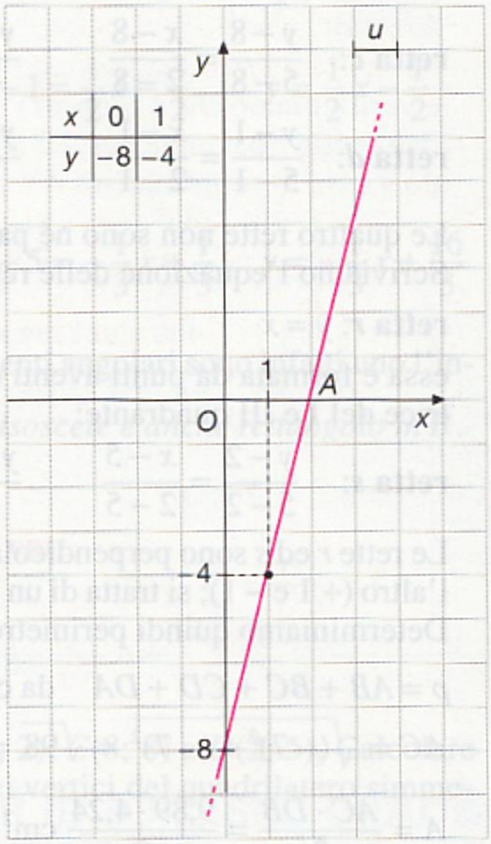


Figura 19

ESEMPIO

- Risolvere graficamente l'equazione $\dfrac{x-6}{2}=3-x$

  Portiamo tutto al secondo membro:

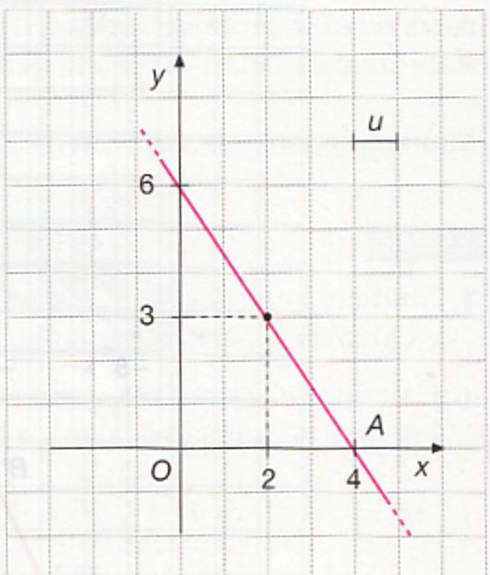
  $0=-\dfrac{x-6}{2}+3-x$ da cui $0=-\dfrac{1}{2}x-x+3+3$

  e consideriamo la retta di equazione:

  $y=-\dfrac{1}{2}x-x+3+3$ cioè $y=-\dfrac{3}{2}x+6$

  Rappresentiamola nel piano cartesiano

x	0	2
y	6	3



L'ascissa del punto A è 4: la soluzione dell'equazione è $x=4$. La soluzione per via algebrica è:

$\dfrac{x-6}{2}=3-x \qquad x-6=2(3-x) \qquad x-6=6-2x$

$x+2x=6+6 \qquad 3x=12 \qquad$ da cui $\qquad x=\mathbf{4}$

Le coniche e le loro equazioni

Abbiamo visto che il diagramma cartesiano di un'equazione lineare, cioè di primo grado, del tipo $y = mx + p$ è una retta.
Vogliamo adesso affrontare lo studio di altri particolari diagrammi cartesiani le cui equazioni non sono lineari ma di secondo grado. Tutte le equazioni di secondo grado hanno come grafico delle curve che appartengono a una stessa famiglia: la *famiglia delle coniche*.

La parabola

Consideriamo due grandezze, per esempio il lato di un quadrato x e la sua area y; la relazione che lega il lato di un quadrato e la sua area è $y = x^2$.
Rappresentiamola quindi nel piano cartesiano costruendo la tabella dei valori:

x	1	2	3	…
y	1	4	9	…

Otteniamo una curva che è una parte di parabola, esattamente un ramo di parabola (Fig. 20).

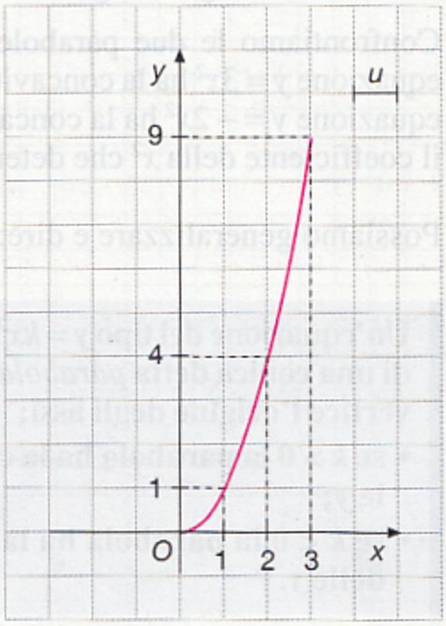


Figura 20

Allarghiamo adesso il nostro studio a tutto il piano cartesiano ed esaminiamo un'equazione di secondo grado del tipo $y = 3x^2$.

Scriviamo la tabella dei valori

x	0	1	-1	2	-2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
y	0	3	3	12	12	$\frac{27}{4}$	$\frac{27}{4}$

e rappresentiamo nel piano cartesiano i punti:

$O(0; 0)$ $A(1; 3)$ $B(-1; 3)$

$C(2; 12)$ $D(-2; 12)$

$E\left(\frac{3}{2}; \frac{27}{4}\right)$ $F\left(-\frac{3}{2}; \frac{27}{4}\right)$

Congiungendo con una curva i punti, otteniamo una conica detta parabola (Fig. 21).

L'asse y, asse di simmetria della parabola, si chiama *asse della parabola* e l'origine degli assi è il *vertice della parabola*.

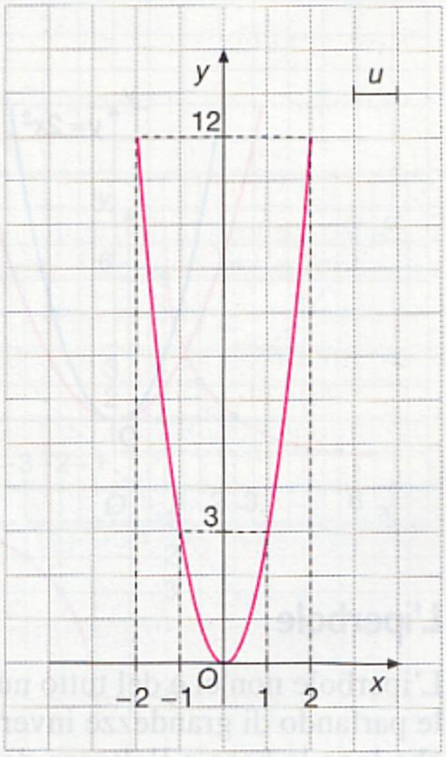


Figura 21

Consideriamo adesso un'equazione del tipo $y = -2x^2$ e rappresentiamola nel piano cartesiano:

x	0	1	-1	2	-2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
y	0	-2	-2	-8	-8	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$

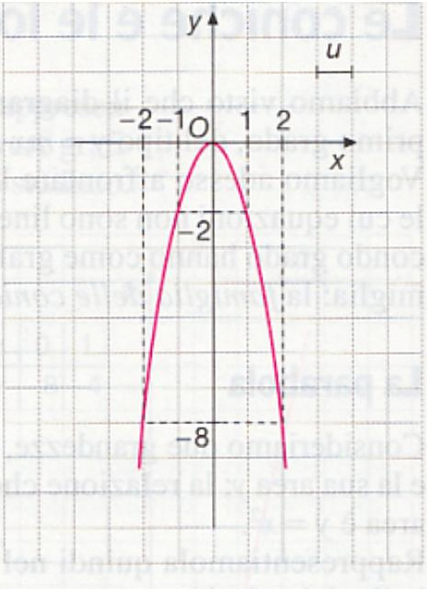


Figura 22

Otteniamo ancora una parabola avente come asse l'asse y e come vertice l'origine degli assi (Fig. 22).

Confrontiamo le due parabole e le loro equazioni; la prima di equazione $y = 3x^2$ ha la concavità rivolta verso l'alto, la seconda di equazione $y = -2x^2$ ha la concavità rivolta verso il basso; è quindi il coefficiente della x^2 che determina la concavità della parabola.

Possiamo generalizzare e dire:

Un'equazione del tipo $y = kx^2$ (con k numero relativo qualsiasi) è l'equazione di una conica detta *parabola* avente come asse di simmetria l'asse y e come vertice l'origine degli assi;

- **se $k > 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso il semiasse positivo delle y;**
- **se $k < 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso il semiasse negativo delle y.**

Osserviamo anche (Fig. 23) che il valore di k determina l'apertura della parabola: al diminuire del valore assoluto di k, la parabola diviene più aperta.

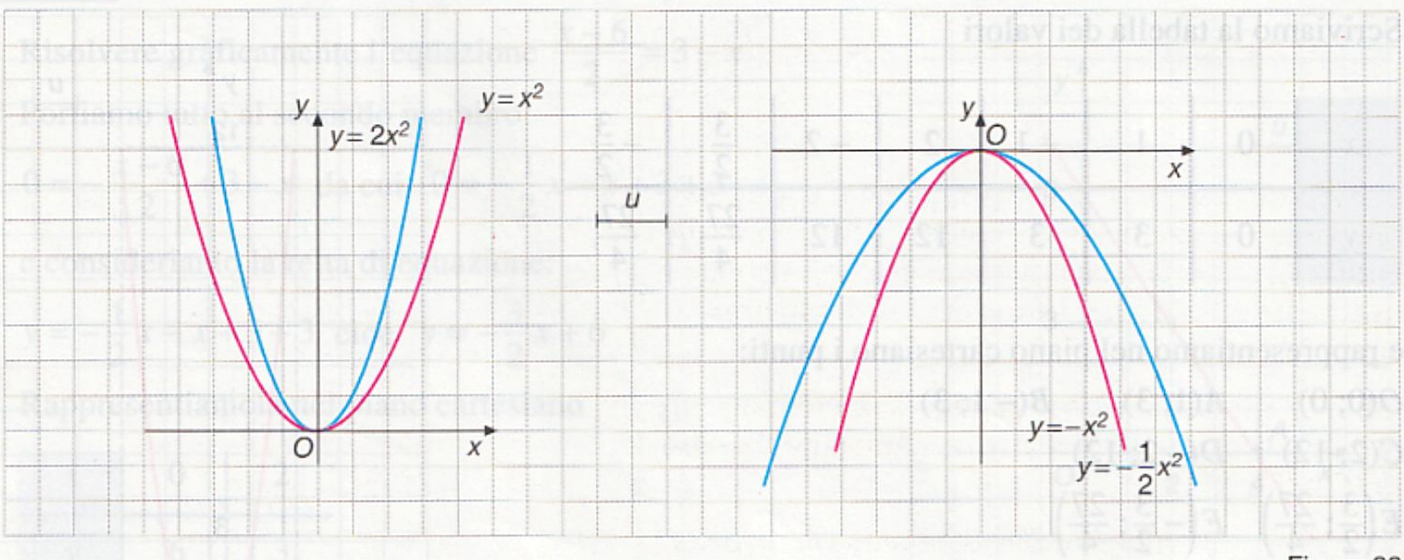


Figura 23

L'iperbole

L'iperbole non ci è del tutto nuova, abbiamo già incontrato un ramo di iperbole parlando di grandezze inversamente proporzionali. Vi ricordate la funzione che lega la base e l'altezza dei rettangoli equivalenti? Se l'area di questi rettangoli è, per esempio, 18 cm^2, avremo l'equazione $xy = 18$.

Rappresentiamola nel piano cartesiano costruendo la solita tabella dei valori:

x	1	2	3	6	9	18
y	18	9	6	3	2	1

Otteniamo una curva che è un ramo di iperbole (Fig. 24).

Figura 24

Allarghiamo il nostro studio a tutto il piano cartesiano ed esaminiamo una equazione di secondo grado del tipo $xy = 6$. Scriviamo la tabella dei valori:

x	1	-1	2	-2	6	-6	3	-3
y	6	-6	3	-3	1	-1	2	-2

e rappresentiamo i punti nel piano cartesiano: unendoli otteniamo una conica detta **iperbole equilatera** formata da due rami, giacenti uno nel I quadrante e l'altro nel III quadrante, simmetrici rispetto all'origine degli assi (Fig. 25).

Gli assi x e y, a cui i due rami si avvicinano sempre più, senza però toccarli, si chiamano *asintoti dell'iperbole*.

L'iperbole presenta due assi di simmetria, le bisettrici dei quadranti, che sono quindi perpendicolari tra di loro.

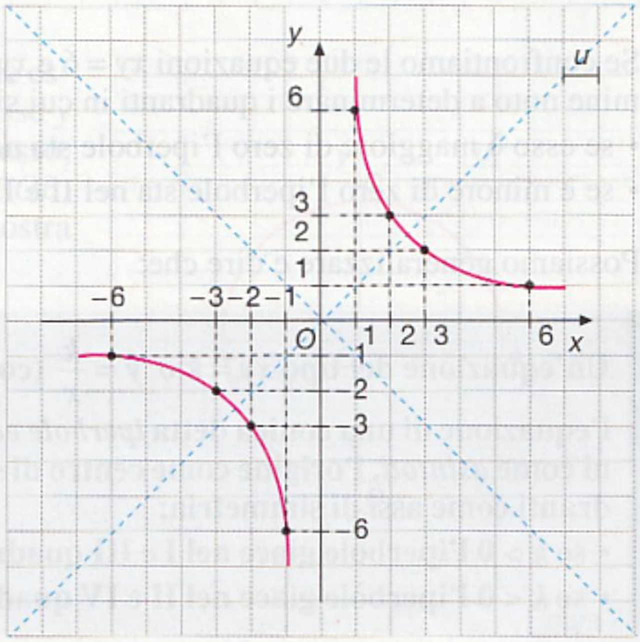


Figura 25

Consideriamo adesso un'equazione del tipo $xy = -12$ e rappresentiamola nel piano cartesiano:

x	1	− 1	2	− 2	3	− 3	6	− 6
y	− 12	12	− 6	6	− 4	4	− 2	2

Otteniamo ancora un'iperbole formata da due rami, giacenti uno nel II quadrante e l'altro nel IV quadrante, simmetrici rispetto all'origine, avente gli assi x e y come asintoti e le bisettrici dei quadranti come assi di simmetria (Fig. 26).

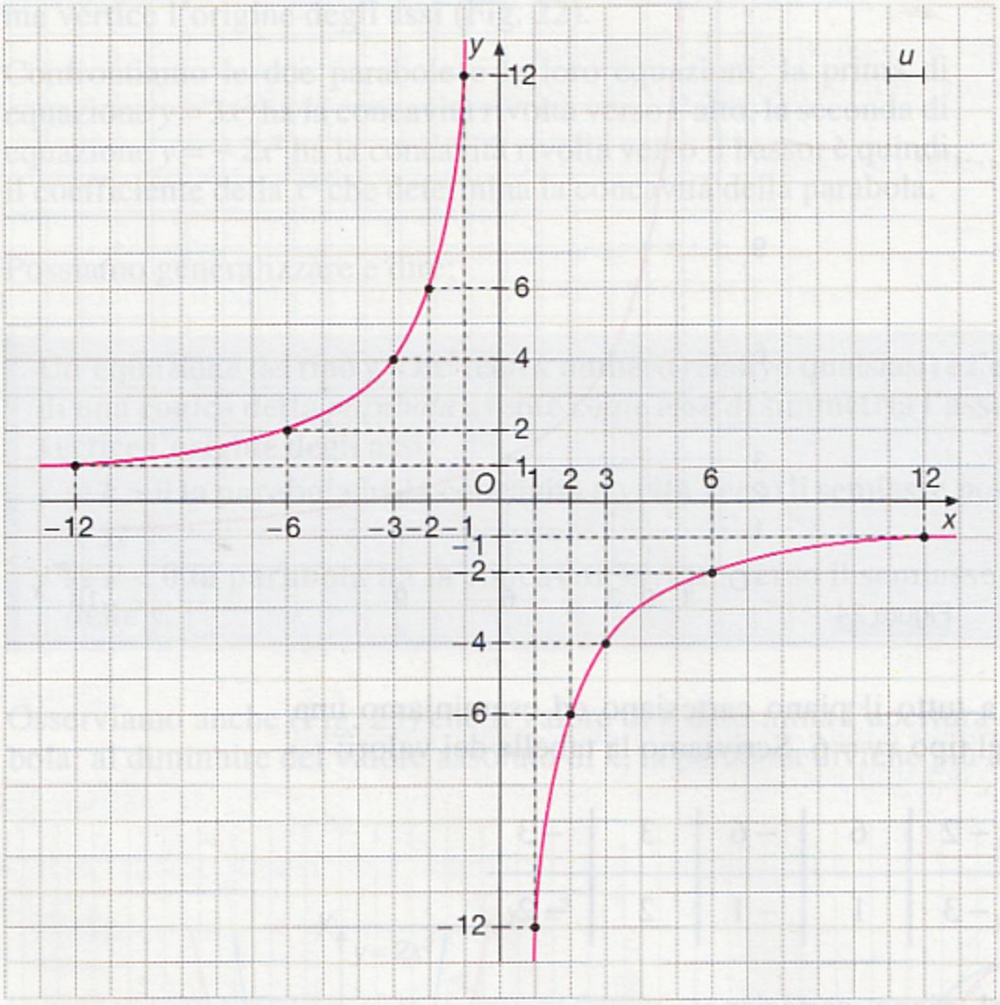


Figura 26

Se confrontiamo le due equazioni $xy = 6$ e $xy = -12$, ci accorgiamo che è il termine noto a determinare i quadranti in cui si trovano i due rami dell'iperbole:
- se esso è maggiore di zero l'iperbole sta nel I e III quadrante,
- se è minore di zero l'iperbole sta nel II e IV quadrante.

Possiamo generalizzare e dire che:

Un'equazione del tipo $xy = k$ o $y = \dfrac{k}{x}$ (con k numero relativo qualsiasi) è l'equazione di una conica detta *iperbole equilatera* avente gli assi cartesiani come *asintoti*, l'origine come centro di simmetria e le bisettrici dei quadranti come assi di simmetria;
- **se $k > 0$ l'iperbole giace nel I e III quadrante;**
- **se $k < 0$ l'iperbole giace nel II e IV quadrante.**

La circonferenza

Disegniamo nel piano cartesiano una circonferenza di centro O e raggio lungo 3 cm e proponiamoci di scrivere l'equazione che la rappresenta.
Ricordiamo che la circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti dal centro e che la misura della distanza di un punto qualsiasi dal centro è uguale al raggio; consideriamo allora un punto qualsiasi della circonferenza, per esempio $P(x; y)$ (Fig. 27), e calcoliamo la sua distanza dal centro O:

$$PO = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

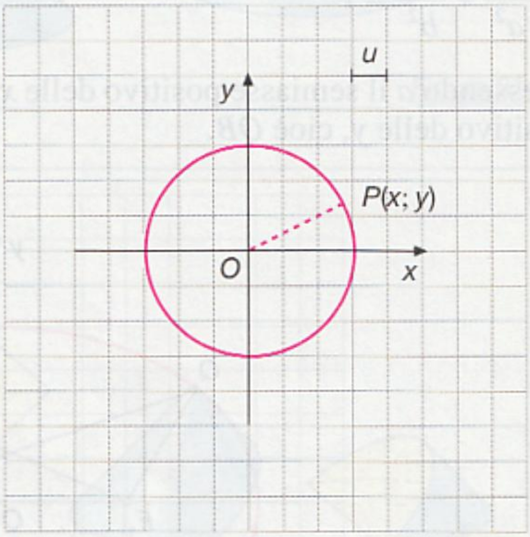


Figura 27

Poiché tale distanza è uguale al raggio possiamo scrivere:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3$$

Elevando al quadrato i due membri dell'equazione, otteniamo:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 3^2 \quad \text{da cui} \quad x^2 + y^2 = 9$$

che è l'equazione della nostra circonferenza di centro O e raggio 3 cm; l'origine degli assi è il suo centro di simmetria e una qualsiasi retta del fascio passante per O è un suo asse di simmetria.

Se indichiamo con r la generica misura del raggio, otteniamo l'equazione:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

che è l'*equazione della circonferenza di centro* O *e raggio* r. Diremo allora che:

> **Un'equazione del tipo $x^2 + y^2 = r^2$ è l'equazione della circonferenza avente centro nell'origine degli assi e raggio r. Essa ha l'origine come centro di simmetria e le infinite rette passanti per O come assi di simmetria.**

Consideriamo l'equazione $x^2 + y^2 = 16$: sappiamo che è l'equazione di una circonferenza di centro O e raggio $r = \sqrt{16} = 4$.

Per rappresentarla nel piano cartesiano osserviamo che essa incontra l'asse x nei punti $A(4; 0)$ e $B(-4; 0)$ e l'asse y nei punti $C(0; 4)$ e $D(0; -4)$; basterà allora un compasso, con centro in O e apertura uguale alle misure di OA, OB, OC oppure OD indifferentemente, per disegnare la nostra circonferenza (Fig. 28).

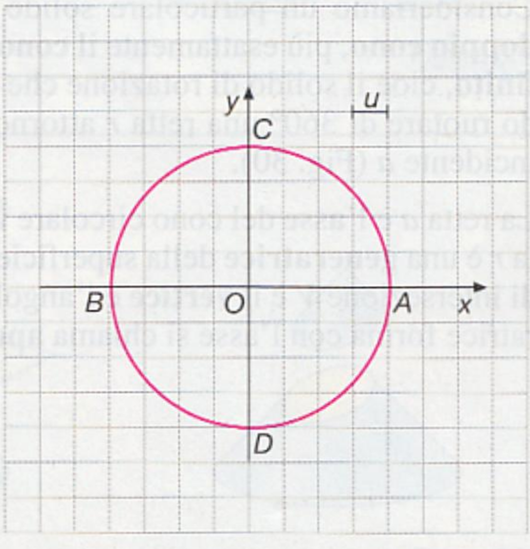


Figura 28

L'ellisse

Consideriamo un'altra conica, l'**ellisse**, che è l'insieme dei punti del piano tali che la somma delle loro distanze da due punti fissi, detti **fuochi**, risulti costante (Fig. 29):

$$PF_1 + PF_2 = k \quad QF_1 + QF_2 = k \quad RF_1 + RF_2 = k.$$

Se ci riferiamo al caso particolare dei due fuochi simmetrici rispetto all'origine e appartenenti all'asse x, l'equazione dell'ellisse nel piano cartesiano è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

essendo a il semiasse positivo delle x, cioè il segmento OA, e b il semiasse positivo delle y, cioè OB.

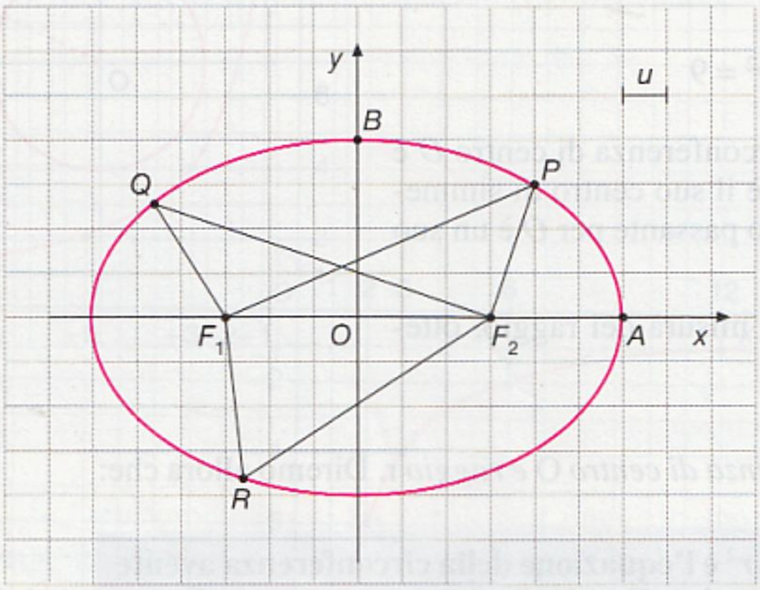


Figura 29

Perché "coniche"?

Abbiamo considerato la parabola, l'iperbole, la circonferenza e l'ellisse come delle curve appartenenti alla *famiglia delle coniche*. Perché proprio tale nome? Vediamone il motivo.

Consideriamo un particolare solido di rotazione, il **doppio cono**, più esattamente il **cono circolare indefinito**, cioè il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare di 360° una retta r attorno a un'altra retta incidente a (Fig. 30).

La retta a è l'**asse** del cono circolare indefinito, la retta r è una **generatrice** della superficie conica, il punto di intersezione V è il **vertice** e l'angolo α che la generatrice forma con l'asse si chiama **apertura** del cono.

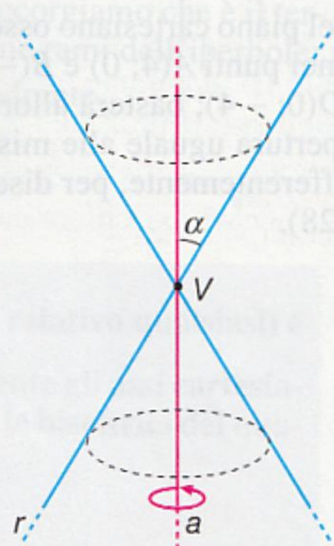


Figura 30

Consideriamo ora le sezioni che si ottengono secando il cono con un piano.

- Se il piano è perpendicolare all'asse di rotazione si ottiene una circonferenza (Fig. 31).

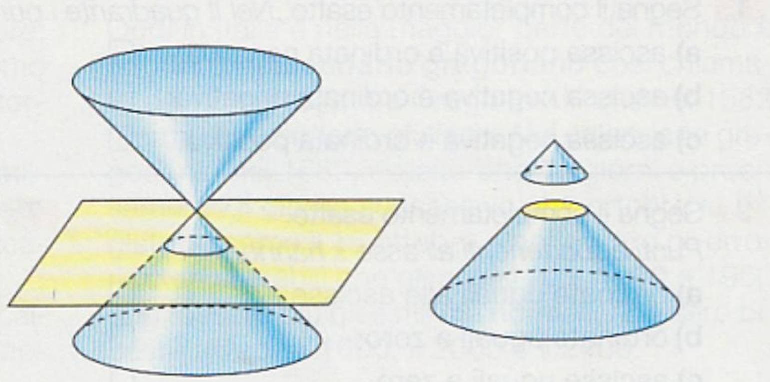


Figura 31

- Se il piano è parallelo a una generatrice si ottiene una parabola (Fig. 32).

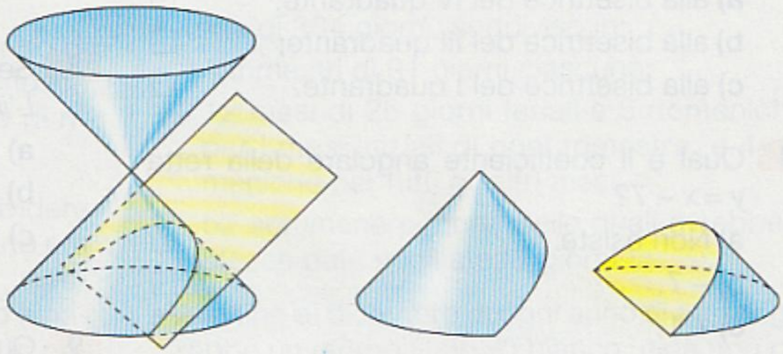


Figura 32

- Se il piano è parallelo all'asse di rotazione si ha un'iperbole (Fig. 33).

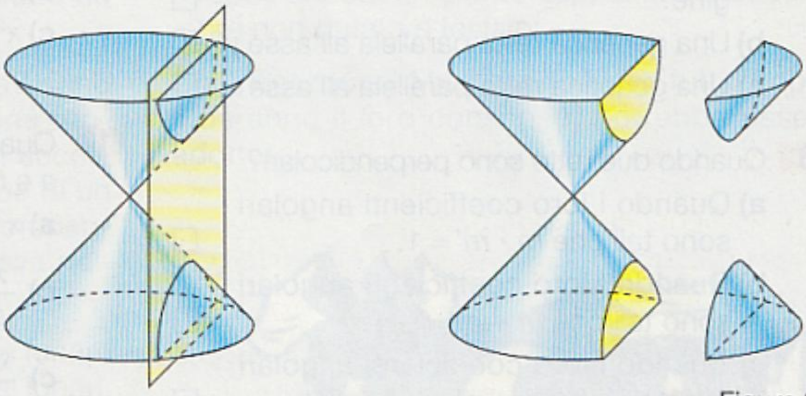


Figura 33

- Se il piano forma con l'asse di rotazione un angolo maggiore dell'apertura del cono si ottiene un'ellisse.

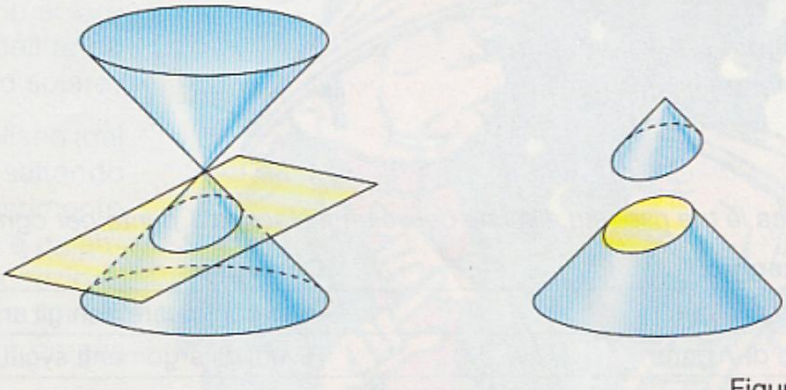


Figura 34

controllo Verifica la tua preparazione segnando, nei seguenti esercizi, le risposte esatte.

1 Segna il completamento esatto. *Nel II quadrante i punti hanno*:

a) ascissa positiva e ordinata negativa; ☐
b) ascissa negativa e ordinata negativa; ☐
c) ascissa negativa e ordinata positiva. ☐

2 Segna il completamento esatto.
Punti appartenenti all'asse x *hanno*:

a) ordinate uguali alle ascisse; ☐
b) ordinate uguali a zero; ☐
c) ascisse uguali a zero. ☐

3 Segna il completamento esatto.
Il punto A (6; – 6) *appartiene*:

a) alla bisettrice del IV quadrante; ☐
b) alla bisettrice del III quadrante; ☐
c) alla bisettrice del I quadrante. ☐

4 Qual è il coefficiente angolare della retta $y = x - 7$?

a) Non esiste. ☐
b) – 7. ☐
c) + 1. ☐

5 Che cosa rappresenta l'equazione $y = mx$?

a) Una generica retta passante per l'origine. ☐
b) Una generica retta parallela all'asse *y*. ☐
c) Una generica retta parallela all'asse *x*. ☐

6 Quando due rette sono perpendicolari?

a) Quando i loro coefficienti angolari sono tali che $m \cdot m' = 1$. ☐
b) Quando i loro coefficienti angolari sono tali che $m + m' = -1$. ☐
c) Quando i loro coefficienti angolari sono tali che $m \cdot m' = -1$. ☐

7 Segna il completamento esatto.
La parabola $y = 4x^2$ *ha la concavità:*

a) rivolta verso il semiasse positivo delle *x*; ☐
b) rivolta verso il semiasse positivo delle *y*; ☐
c) rivolta verso il semiasse negativo delle *y*. ☐

8 Segna il completamento esatto.
L'iperbole $xy = 35$ *giace:*

a) nel I e IV quadrante; ☐
b) nel II e IV quadrante; ☐
c) nel I e III quadrante. ☐

9 Qual è l'equazione del cerchio di centro *O* e raggio uguale a 7?

a) $x^2 + y^2 = 7$ ☐
b) $x^2 + y^2 = -7$ ☐
c) $x^2 + y^2 = 49$ ☐

10 Qual è l'equazione di un'ellisse di semiassi *a* e *b*?

a) $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ☐
b) $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ ☐
c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ☐

Verifica le tue risposte alla fine del volume e segna 1 punto per ogni risposta esatta.

Punteggio	Consiglio
Da 10 a 7 punti	Puoi continuare con gli argomenti successivi.
Meno di 7 punti	Rivedi gli argomenti svolti, hai ancora dei dubbi.

nella storia...

Gli antichi calendari Anni, mesi, settimane, giorni, ore, minuti, secondi: la vita dell'uomo è ed è stata scandita dallo scorrere del tempo.
Siamo arrivati, secolo dopo secolo, al terzo millennio, e con curiosità il 1° gennaio 2000 abbiamo sicuramente sfogliato il nostro nuovo calendario.
Già, il calendario! Sono stati i nostri antenati, calcolo dopo calcolo, approssimazione dopo approssimazione a stabilire il calendario.
Vogliamo vederne la storia attraverso l'analisi di alcuni di essi?
Da *Storia degli uomini e dei loro calendari* di F. A. Mella, leggiamo alcuni passi.

I **Sumeri** (V millennio a.C.) avevano un anno di 12 mesi, ciascuno di 30 giorni. Non si conosce come compensassero il fatto che il moto di rivoluzione durava 365 giorni.

I **Cinesi**, nel XXVI secolo a.C., usavano dividere il tempo in cicli di 60 anni e il loro calendario era basato solo sulla Luna. Verso il 2300 a.C., si regolò la differenza fra i 354 giorni dell'anno lunare e i 365 dell'anno solare aggiungendo un periodo ogni 19 mesi.

I **Babilonesi** adottarono 12 mesi di 29 giorni e di 30 giorni. Periodicamente aggiungevano un mese supplementare.

Gli **Egizi**, all'inizio del III millennio a.C., avevano un anno di 12 mesi di 30 giorni con 5 giorni supplementari alla fine dell'ultimo mese. Si accorsero però che anche così c'era un ritardo di un quarto di giorno che periodicamente compensavano con l'anno "vago" che consisteva nell'aggiungere 5 giorni alla fine.

Il **calendario ebraico** antico era insieme lunare e solare, i mesi si calcolavano con le fasi lunari, ma l'anno poteva avere 12 o 13 mesi. Quando aveva 13 mesi si chiamava "anno embolismico" e poteva avere 383, 384 o 385 giorni. In tal modo si compensava la differenza tra anno solare e anno lunare. Ogni 19 anni l'inizio dell'anno ebraico coincideva con l'inizio dell'anno solare.

Fu **Giulio Cesare** che nel calendario giuliano (dal suo nome) iniziò l'anno il 1° gennaio, saltando due mesi in modo da recuperare lo sfasamento che si era creato tra calendario solare e calendario civile. Ogni quattro anni, senza eccezioni, veniva introdotto l'anno bisestile; il giorno in più era il 24 febbraio che si ripeteva e si chiamava *bis sextus dies ante calendas Martias*.

Oggi in Italia e nella maggior parte del mondo è adottato il **calendario gregoriano** così chiamato dal nome del papa Gregorio XIII che nel 1582 riformò il calendario giuliano. Nel calendario gregoriano, nel 1582, si saltarono 10 giorni e precisamente il giorno successivo al 4 ottobre fu registrato come il 15 ottobre e per evitare gli errori futuri si stabilì che gli anni 1700, 1800 e 1900 non fossero più bisestili ma normali, rimasero bisestili invece il 1600, il 2000 e il 2400.

E in futuro? C'è la proposta, già dal 1931, di un **calendario perpetuo**, più aderente alle esigenze della vita moderna. Quali dovrebbero essere le sue caratteristiche?

- Anno di 364 giorni, suddiviso in:
  - 4 trimestri di 91 giorni ciascuno;
  - 12 mesi di 26 giorni feriali e 5 domeniche, per i mesi iniziali di ogni trimestre, e 4 domeniche per tutti gli altri mesi;
  - 52 settimane ognuna delle quali avrebbe le stesse date negli stessi giorni.
- Alla fine di dicembre di ogni anno si aggiungerebbe un giorno (il 365°) bianco, cioè non datato e festivo.
- Alla fine di giugno di ogni 4 anni si aggiungerebbe ancora un giorno supplementare, sempre non datato e festivo.

Che rivoluzione! Ma il giorno in cui tutti i popoli daranno il loro consenso, potrebbe essere adottato.