Frazione generatrice di un numero decimale

Data una frazione, conosci ormai quali sono i criteri per stabilire in quale tipo di numero decimale si può trasformare ed eseguendo la divisione fra numeratore e denominatore sei in grado di trovare questo numero.
Affrontiamo adesso il problema inverso: dato il numero decimale trovare la frazione da cui ha avuto origine, trovare cioè la **frazione generatrice del numero decimale**.

1) *Consideriamo un numero decimale limitato*, per esempio: 7,91.
Sappiamo di poterlo scrivere nel seguente modo:

$$7{,}91 = 7 + 9 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{100} = 7 + \frac{9}{10} + \frac{1}{100} = \frac{700 + 90 + 1}{100} = \frac{791}{100}$$

Possiamo dedurre la regola generale e dire che:

> **La frazione generatrice di un numero decimale limitato è una frazione avente per numeratore il numero intero che si ottiene togliendo la virgola e per denominatore 10, 100, 1 000... secondo che le cifre decimali del numero sono 1, 2, 3...**

Esempio

$3{,}57 = \frac{357}{100} \qquad 0{,}27 = \frac{27}{100} \qquad 4{,}9 = \frac{49}{10} \qquad 0{,}093 = \frac{93}{1\,000}$

2) *Consideriamo un numero decimale periodico semplice*, per esempio: $3{,}\overline{12}$.
Per trovare un procedimento che ci permetta di trasformare $3{,}\overline{12}$ nella sua frazione generatrice ragioniamo così:

sia x la frazione generatrice che vogliamo trovare, dovrà essere ovviamente:
$x = 3{,}121212...$

moltiplichiamo i due numeri per 100: $100 \cdot x = 100 \cdot 3{,}121212...$, cioè:
$100\,x = 312{,}1212...$

sottraiamo ai due numeri rispettivamente x e $3{,}1212...$, cioè:
$100\,x - x = 312{,}1212... - 3{,}1212...$, cioè $99\,x = 309$, da cui:

$$x = \frac{309}{99}$$

che è la frazione generatrice di $3{,}\overline{12}$.

Ripetiamo il ragionamento per un altro numero, per esempio $0{,}\overline{63}$.

Se x è la frazione generatrice, avremo: $x = 0{,}636363...$

moltiplichiamo per 100: $100 \cdot x = 100 \cdot 0{,}636363...$, cioè $100\,x = 63{,}6363...$

sottraiamo rispettivamente x e $0{,}6363...$: $100\,x - x = 63{,}6363... - 0{,}6363...$
e otteniamo $99\,x = 63$, da cui:

$$x = \frac{63}{99}$$

che è la frazione generatrice di $0{,}\overline{63}$.

Nei due esempi fatti, entrambe le frazioni hanno per numeratore la differenza fra tutto il numero, scritto senza la virgola, e la parte intera:

$309 = 312 - 3 \qquad 63 = 63 - 0$

e per denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo:

$3,\overline{12}$, $0,\overline{63}$ > due cifre nel periodo → 99 per denominatore

Possiamo allora stabilire la regola generale e dire che:

La frazione generatrice di un numero decimale periodico semplice è una frazione che ha per numeratore la differenza fra tutto il numero dato senza la virgola e la sua parte intera e per denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo.

Esempio

$4,\overline{37} = \frac{437-4}{99} = \frac{433}{99} \qquad 71,\overline{7} = \frac{717-71}{9} = \frac{646}{9} \qquad 0,\overline{213} = \frac{213}{999}$

3) *Consideriamo un numero decimale periodico misto*, per esempio $0,7\overline{1}$, e proponiamoci di trovare la sua frazione generatrice con il seguente ragionamento:

sia x la frazione generatrice, dovrà essere ovviamente: $x = 0,71111...$

moltiplichiamo i due numeri per 10: $10 \cdot x = 10 \cdot 0,71111...$
da cui $10x = 7,1111...$ cioè $10x = 7,\overline{1}$

sappiamo che $7,\overline{1} = \frac{71-7}{9} = \frac{64}{9}$, quindi: $10x = \frac{64}{9}$, da cui:

$$x = \mathbf{\frac{64}{90}}$$

che è la frazione generatrice di $0,7\overline{1}$.

Ripetiamo il ragionamento per un altro numero, per esempio $3,27\overline{13}$.

Sia x la frazione generatrice: $x = 3,27131313...$

moltiplichiamo i due numeri per 100: $100 \cdot x = 100 \cdot 3,27131313...$
da cui $100x = 327,131313...$ cioè $100x = 327,\overline{13}$
sappiamo che $327,\overline{13} = \frac{32\,713 - 327}{99} = \frac{32\,386}{99}$, quindi: $100x = \frac{32\,386}{99}$, da cui:

$$x = \mathbf{\frac{32\,386}{9\,900}}$$

che è la frazione generatrice di $3,27\overline{13}$.

Nei due esempi fatti, entrambe le frazioni hanno per numeratore la differenza fra tutto il numero, scritto senza la virgola, e tutta la parte che precede il periodo, scritta anch'essa senza la virgola:

$64 = 71 - 7 \qquad 32\,386 = 32\,713 - 327$

e per denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo:

$0{,}7\overline{1}$ < una cifra nel periodo; una cifra nell'antiperiodo $\rightarrow$ 90

$3{,}27\overline{13}$ < due cifre nel periodo; due cifre nell'antiperiodo $\rightarrow$ 9 900

Possiamo allora stabilire la regola generale e dire che:

La frazione generatrice di un numero decimale periodico misto è una frazione che ha per numeratore la differenza fra tutto il numero dato, senza la virgola, e tutta la parte che precede il periodo, senza la virgola; per denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Esempio

$$5{,}3\overline{2} = \frac{532-53}{90} = \frac{479}{90} \qquad 0{,}7\overline{3} = \frac{73-7}{90} = \frac{66}{90} \qquad 2{,}7\overline{31} = \frac{2\,731-27}{990} = \frac{2\,704}{990}$$

Riepilogo

$$0{,}\overline{73} = \frac{73-0}{99} = \frac{73}{99} \qquad 0{,}7\overline{91} = \frac{791-7}{990} = \frac{\cancel{784}^{\,392}}{\cancel{990}_{\,495}} = \frac{392}{495}$$

$$4{,}\overline{2} = \frac{42-4}{9} = \frac{38}{9} \qquad 7{,}\overline{20} = \frac{720-7}{99} = \frac{713}{99}$$

$$7{,}5 = \frac{\cancel{75}^{\,15}}{\cancel{10}_{\,2}} = \frac{15}{2} \qquad 0{,}727 = \frac{727}{1\,000}$$

$$3{,}0\overline{4} = \frac{304-30}{90} = \frac{\cancel{274}^{\,137}}{\cancel{90}_{\,45}} = \frac{137}{45} \qquad 4{,}3\overline{7} = \frac{437-43}{90} = \frac{\cancel{394}^{\,197}}{\cancel{90}_{\,45}} = \frac{197}{45}$$