Il concetto di insieme

Che cos'è un insieme?
Nel nostro parlare quotidiano con il termine "insieme" intendiamo un gruppo di oggetti, di persone o di animali, ad esempio una collezione di statuette, una squadra di atleti, un gruppo di amici o un insieme di cani. Come vedi, però, è un uso alquanto indeterminato; dicendo "un insieme di cani" non esprimiamo esattamente di quali cani stiamo parlando: cani da guardia, da caccia, di compagnia, ...

In matematica con la parola "**insieme**" si intende solo un gruppo di oggetti, persone o animali, chiamati **elementi** dell'insieme, che possono essere definiti **con assoluta certezza** come elementi **appartenenti** o **non appartenenti** all'insieme.

Non possono quindi costituire un insieme gli abiti belli o gli animali veloci e neppure i negozi più belli di una via. Perché? Perché non sappiamo con assoluta certezza quali elementi possiamo considerare appartenenti a questi insiemi.

Costituiscono invece un insieme gli abiti color rosso o gli animali erbivori o ancora i negozi di abbigliamento di una determinata via. Perché? Perché sappiamo con assoluta certezza quali abiti, animali o negozi possiamo considerare appartenenti a questi insiemi.

> L'**insieme**, in senso matematico, è un raggruppamento di **elementi** distinti l'uno dall'altro e tali da poter stabilire con assoluta certezza se appartengono o no all'insieme considerato.

Un insieme si indica con le lettere maiuscole dell'alfabeto italiano, A, B, C, X, Y, ...; gli elementi con quelle minuscole a, b, c, x, y, ...

Per indicare che un elemento **a appartiene all'insieme** A, scriviamo:
$a \in A$ e leggiamo "l'elemento a appartiene all'insieme A". Il simbolo $\in$ è detto **simbolo di appartenenza**.

Per indicare che un elemento **b non appartiene all'insieme** A, scriviamo:
$b \notin A$ e leggiamo "l'elemento b non appartiene all'insieme A". Il simbolo $\notin$ è detto **simbolo di non appartenenza**.

esercizi a pag. 118

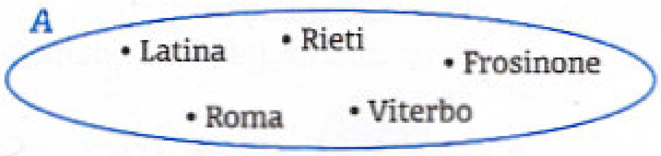
Come rappresentare un insieme

Un insieme può essere rappresentato in tre modi: per **elencazione**, **graficamente** con i **diagrammi di Eulero-Venn** e per **caratteristica**.
Ad esempio, l'insieme *A* formato dalle città capoluogo del Lazio (Frosinone, Latina, Rieti, Roma e Viterbo) lo possiamo rappresentare:

- per **elencazione** o in **forma tabulare**: tutti gli elementi dell'insieme vengono trascritti tra due parentesi graffe e separati tra loro da un punto e virgola:

  A = **{Frosinone; Latina; Rieti; Roma; Viterbo}**

- **graficamente**: tutti gli elementi dell'insieme, evidenziati da un punto, vengono trascritti all'interno di una linea semplice chiusa; questa linea è detta **diagramma di Eulero-Venn**.



  Ricorda che la linea chiusa del diagramma di Eulero-Venn può avere una forma qualsiasi purché chiusa.

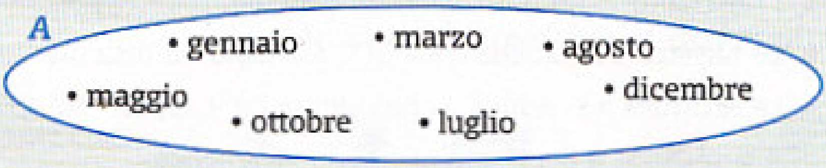
- per **caratteristica**: tra due parentesi graffe viene descritta la caratteristica o la proprietà che distingue tutti gli elementi dell'insieme:

  A = **{x | x è una città capoluogo di provincia del Lazio}**

  Leggiamo: "l'insieme *A* formato da tutti gli elementi x tali che ogni x è una città capoluogo di provincia del Lazio".

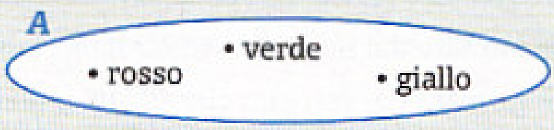
ESEMPI

1. Rappresentiamo l'insieme *A* formato dai mesi di 31 giorni.
   - Per elencazione: *A* = {gennaio; marzo; maggio; luglio; agosto; ottobre; dicembre}
   - Graficamente:



   - Per caratteristica: *A* = {x | x è un mese di 31 giorni}

2. Rappresentiamo l'insieme *B* formato dai colori del semaforo.
   - Per elencazione: *A* = {rosso; verde; giallo}
   - Graficamente:



   - Per caratteristica: *A* = {x | x è un colore del semaforo}

esercizi a pag. 118

Insieme finito, infinito e vuoto

Consideriamo gli insiemi:

$A = \{x \mid x$ è una lettera della parola "estate"$\}$;
$B = \{x \mid x$ è un numero naturale dispari$\}$;
$C = \{x \mid x$ è una giraffa con due zampe$\}$.

Quali e quanti elementi contengono questi insiemi?

- L'insieme $\mathbf{A = \{e; s; t; a\}}$ contiene 4 elementi, cioè un numero ben preciso, e si dice **insieme finito**.
  Sono insiemi finiti: "gli atleti di una squadra", "le note musicali", "le ore di una giornata" ecc.
- L'insieme "numeri dispari" $\mathbf{B = \{1; 3; 5; 7; 9; ...\}}$ contiene infiniti elementi e si dice **insieme infinito**.
  Sono insiemi infiniti: "i numeri maggiori di 20", "i numeri pari", "le stelle dell'Universo" ecc.
- L'insieme $\mathbf{C = \{\ \}}$ non contiene alcun elemento e si dice **insieme vuoto**. Un insieme vuoto si indica con il simbolo $\varnothing$: $\mathbf{C} = \varnothing$.
  Sono insiemi vuoti: "i mesi dell'anno di 35 giorni", "gli uccelli a tre zampe", "i gatti che abbaiano" ecc.

- Un insieme si dice **finito** se i suoi elementi sono in numero finito.
- Un insieme si dice **infinito** se i suoi elementi sono in numero infinito.
- Un insieme si dice **vuoto**, $\varnothing$, se è privo di elementi.

VEDIAMO SE HAI CAPITO

Vero o falso? Segnalo accanto a ciascuna affermazione.

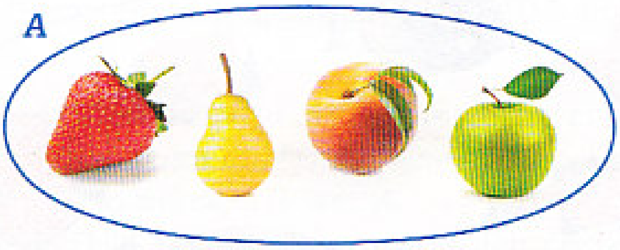
- I ragazzi di 15 anni formano un insieme. v f
- Le ragazze simpatiche della 3ª C formano un insieme. v f
- La scrittura $a \in A$ indica che l'elemento a appartiene all'insieme A. v f
- Il simbolo $\not\subseteq$ è detto simbolo di appartenenza. v f
- La rappresentazione per caratteristica dell'insieme A formato dalle lettere della parola "scivolo" è $A = \{s; c; i; v; o; l\}$. v f
- La rappresentazione per elencazione dell'insieme A formato dalle note musicali è $A = \{$do; re; mi; fa; sol; la; si$\}$. v f
- L'insieme formato dai numeri naturali minori di 100 è un insieme infinito. v f
- L'insieme formato dai serpenti che volano è un insieme vuoto. v f
- L'insieme formato dai numeri maggiori di 50 è un insieme infinito. v f

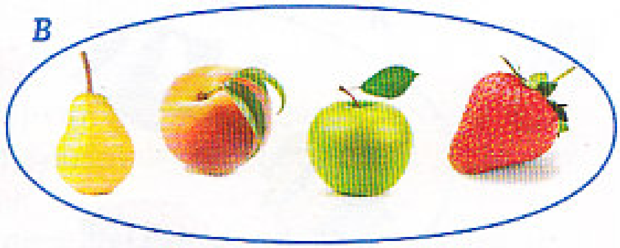
esercizi a pag. 121

Insiemi uguali, disgiunti ed equipotenti

Osserviamo gli insiemi:

$A = \{\text{fragola; pera; pesca; mela}\}$ e $B = \{\text{pera; pesca; mela; fragola}\}$.





Essi, indipendentemente dall'ordine, contengono gli stessi elementi e si dicono **uguali**: $A = B$.

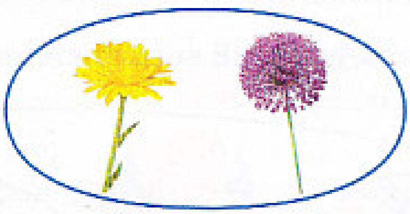
Consideriamo gli insiemi:

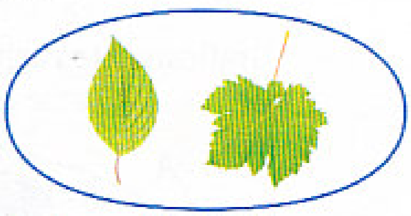
$A = \{\text{libro; quaderno; penna; zaino; telefono}\}$ e $B = \{\text{scatola; cappello; pallone; vaso; cassetta}\}$.

Essi non hanno elementi in comune e si dicono **disgiunti**: $A \neq B$.

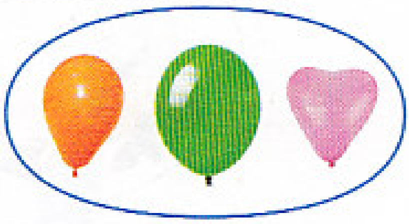
Due o più insiemi, anche disgiunti, possono avere lo stesso numero di elementi. Si dice che hanno la stessa **potenza** o che sono **equipotenti**.

Il numero degli elementi che un insieme contiene, cioè la sua potenza, si dice anche **cardinalità** o **cardinale** dell'insieme.





Insiemi equipotenti di cardinalità 2



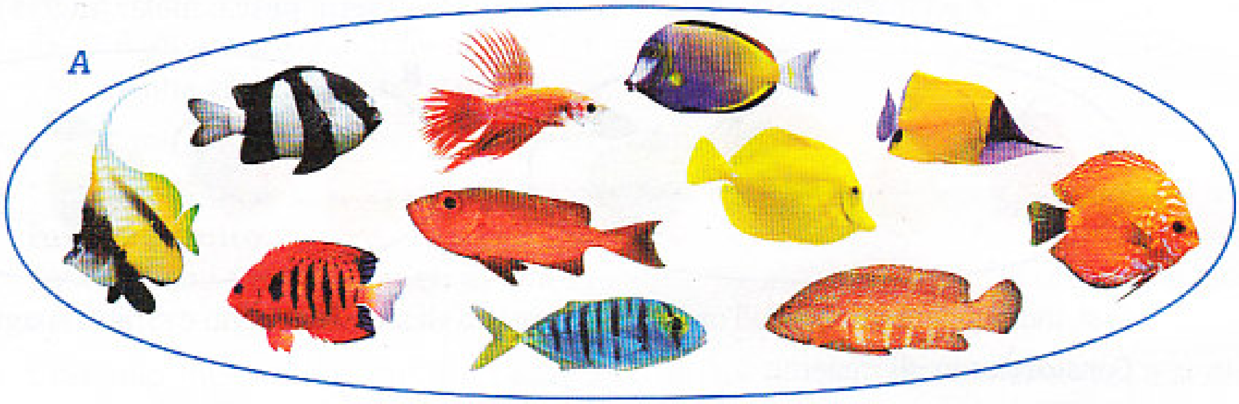
Insiemi equipotenti di cardinalità 3

- Due insiemi sono **uguali** se contengono gli stessi elementi indipendentemente dall'ordine in cui sono elencati.
- Due insiemi sono **disgiunti** se non hanno alcun elemento in comune.
- Due insiemi sono **equipotenti** se contengono lo stesso numero di elementi; tale numero è la **potenza** o **cardinalità** dell'insieme.

esercizi a pag. 121

I sottoinsiemi

Consideriamo l'insieme $A = \{x \mid x \text{ è un pesce dell'acquario di Aldo}\}$.



In questo insieme consideriamo adesso solo gli elementi che hanno la caratteristica "essere pesci rossi"; possiamo quindi prendere in esame i due insiemi:

$A = \{x \mid x \text{ è un pesce dell'acquario di Aldo}\}$;
$B = \{x \mid x \text{ è un pesce rosso dell'acquario di Aldo}\}$.

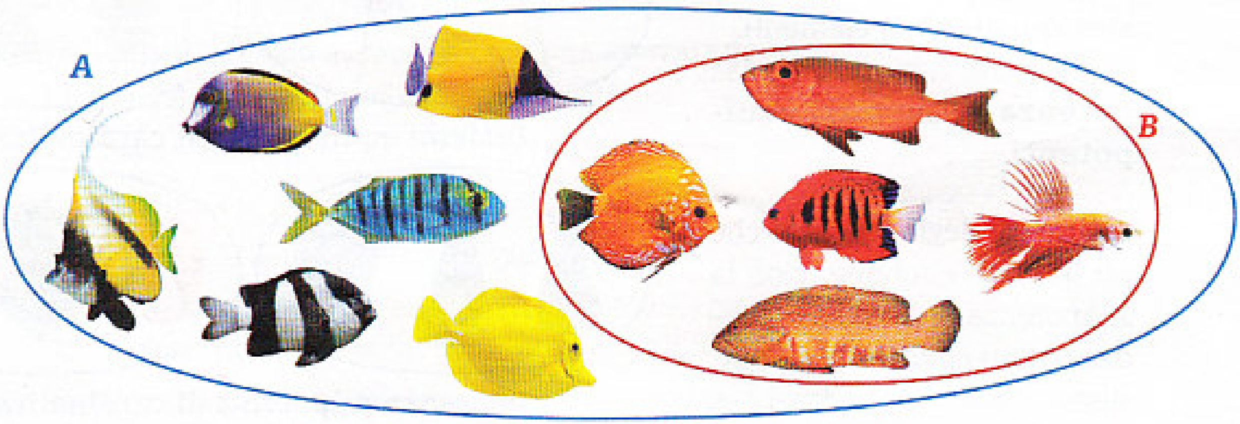
Osserviamo che **ogni elemento dell'insieme *B* appartiene anche ad *A***, diremo che l'**insieme *B* è contenuto nell'insieme *A***, ovvero che ***B* è un sottoinsieme proprio di *A*** e scriveremo:

$$B \subset A$$

che si legge "*B* contenuto in *A*" o "*B* sottoinsieme proprio di *A*".

Il simbolo $\subset$ è detto **simbolo di inclusione**, il simbolo $\not\subset$ è detto **simbolo di non inclusione**.

Graficamente rappresentiamo ***B* sottoinsieme proprio di *A*** nel seguente modo:



Fra i sottoinsiemi di *A* ne possiamo considerare due particolari:

- $C = \{x \mid x \text{ è un pesce dell'acquario di Aldo}\}$ che è uguale ad *A*:

$$C = A$$

- $D = \{x \mid x \text{ è un pesce verde dell'acquario di Aldo}\}$ che è vuoto:

$$D = \varnothing$$

esercizi a pag. 122

Questi due sottoinsiemi si dicono **sottoinsiemi impropri** e scriveremo:

$$C \subseteq A \quad \text{e} \quad D \subseteq A$$

che si legge:

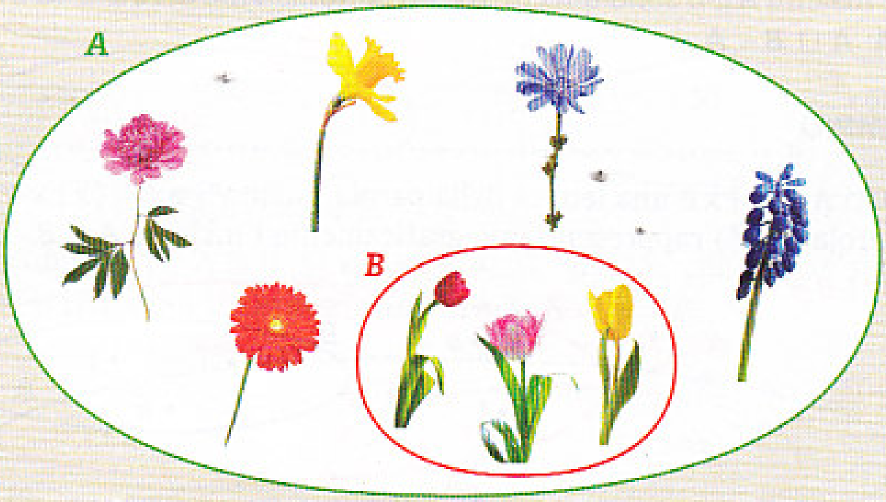
"C contenuto o uguale ad A" o "C sottoinsieme improprio di A"
e
"D contenuto o uguale ad A" o "D sottoinsieme improprio di A".

- Un insieme B si dice **sottoinsieme proprio** di un insieme A se ogni elemento di B appartiene anche ad A, ma c'è almeno un elemento di A che non appartiene a B: $\boldsymbol{B \subset A}$.
- Ogni insieme A ammette due **sottoinsiemi impropri**, se stesso e l'insieme vuoto: $\boldsymbol{A \subseteq A}$ e $\boldsymbol{\varnothing \subseteq A}$.

VEDIAMO SE HAI CAPITO

Vero o falso? Segnalo accanto a ciascuna affermazione.

- Due insiemi sono uguali se contengono gli stessi elementi nello stesso ordine di elencazione. v f
- Due insiemi sono equipotenti se hanno la stessa cardinalità. v f
- L'insieme $A = \{$lunedì; martedì; mercoledì; giovedì; venerdì; sabato; domenica$\}$ è equipotente all'insieme $B = \{x \mid x$ è una lettera della parola "scaduto"$\}$. v f
- Dati gli insiemi $A = \{a \mid a$ è una lettera della parola "leggere"$\}$ e $B = \{l;\ g;\ r\}$, per essi si ha $B \subset A$. v f
- Dati gli insiemi $A = \{a \mid a$ è una lettera della parola "studio"$\}$ e $B = \{b \mid b$ è una lettera della parola "audio"$\}$, per essi si ha $B \subset A$. v f
- Dato l'insieme $A = \{a \mid a$ è una lettera della parola "retino"$\}$ i suoi sottoinsiemi impropri sono A e $\varnothing$. v f
- Dati gli insiemi A e B sotto rappresentati possiamo scrivere $A \subset B$. v f

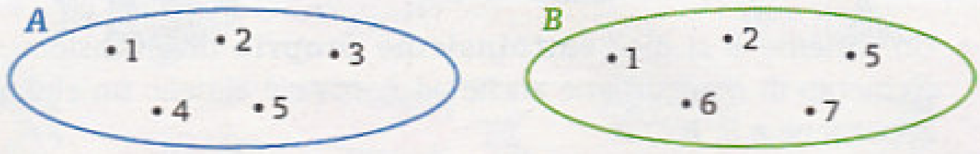


esercizi a pag. 122

L'insieme unione

Fra gli insiemi è possibile eseguire delle "operazioni".

Consideriamo l'operazione **unione**.
Dati i due insiemi: $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ e $B = \{1; 2; 5; 6; 7\}$



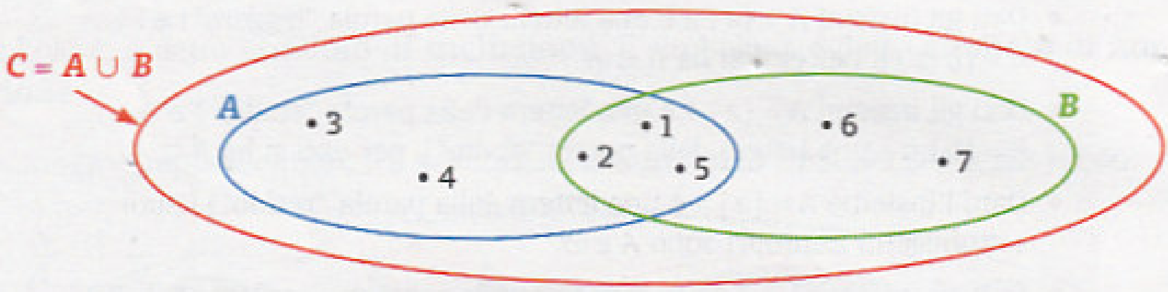
consideriamo tutti gli elementi che **appartengono ad almeno uno dei due insiemi** (considerando una volta sola quelli che appartengono a entrambi), cioè **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** e **7**.

Con questi elementi formiamo l'insieme $C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ che è l'**insieme unione di *A* e di *B*** e che indichiamo nel seguente modo:

$$\mathbf{C = A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}}$$ (leggi "*C* uguale *A* unione *B*")

> Dati due insiemi *A* e *B*, si dice **unione** di tali insiemi, $A \cup B$, l'insieme formato da tutti gli elementi che **appartengono almeno a uno dei due insiemi**, considerando una sola volta gli elementi comuni ai due insiemi: $\mathbf{A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}}$

Graficamente $C = A \cup B$ avrà la seguente rappresentazione:

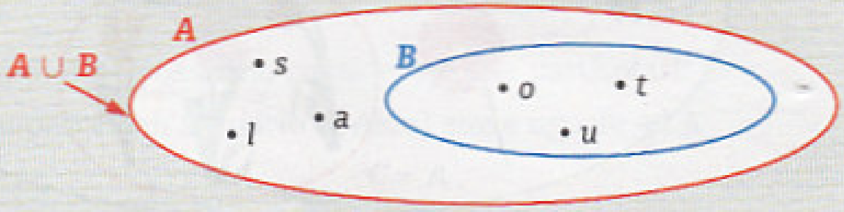


Se due insiemi *A* e *B* sono tali che *B* è un sottoinsieme di *A*, $B \subset A$, il loro **insieme unione** **sarà *A***: $\mathbf{A \cup B = A}$.

ESEMPIO

- Dati $A = \{x \mid x$ è una lettera della parola "saluto"$\}$ e $B = \{x \mid x$ è una lettera della parola "tuo"$\}$ rappresentiamo graficamente l'insieme $A \cup B$.

$\mathbf{A \cup B = A}$



esercizi a pag. 125

L'insieme intersezione

Analizziamo ora l'operazione **intersezione**.

Dati i due insiemi: $A = \{12; 14; 16; 18; 20\}$ e $B = \{10; 16; 18; 22; 24\}$

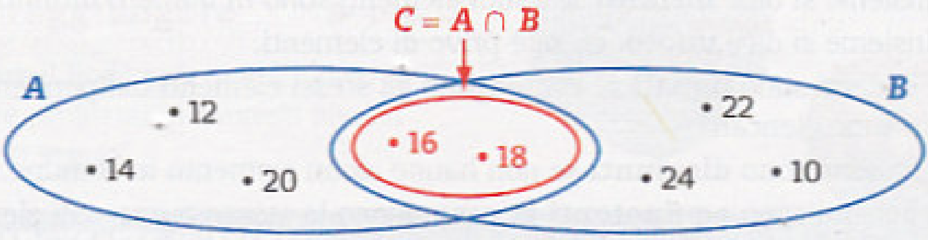
consideriamo tutti gli elementi che **appartengono sia ad *A* sia a *B***, cioè **16** e **18**. Con questi elementi formiamo l'insieme $C = \{16; 18\}$ che è l'**insieme intersezione di *A* e di *B*** che indichiamo nel seguente modo:

$$\mathbf{C = A \cap B = \{16; 18\}} \quad \text{(leggi "}C\text{ uguale }A\text{ intersezione }B\text{")}$$

Dati due insiemi *A* e *B*, si dice **intersezione** di tali insiemi, $A \cap B$, l'insieme formato da quegli elementi che **appartengono sia ad *A* sia a *B***:

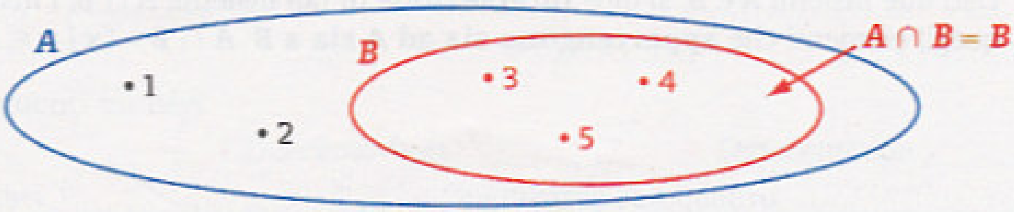
$$\mathbf{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}}$$

Graficamente $C = A \cap B$ avrà la seguente rappresentazione:



- Se due insiemi $A = \{10; 20; 30; 40\}$ e $B = \{50; 60; 70\}$ non hanno alcun elemento in comune, i due insiemi *A* e *B* sono cioè **disgiunti**, l'**insieme intersezione è l'insieme vuoto**, $\mathbf{A \cap B = \varnothing}$.

- Se due insiemi $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ e $B = \{3; 4; 5\}$ sono tali che *B* è un sottoinsieme di *A*, $B \subset A$, il loro **insieme intersezione sarà *B***: $\mathbf{A \cap B = B}$.



esercizi a pag. 127