Operazioni con gli insiemi

Le principali operazioni con gli insiemi sono: l'unione, l'intersezione, la differenza. Vediamo con alcuni esempi di introdurre queste operazioni e di esaminare gli insiemi a cui danno origine.

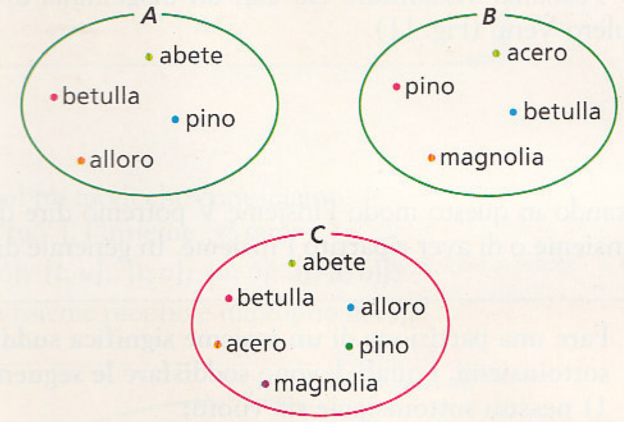
Unione

Consideriamo gli insiemi:
A = {abete; betulla; pino; alloro}
B = {pino; acero; betulla; magnolia}.
Se formiamo l'insieme C con tutti gli elementi di A e di B:
C = {abete; betulla; pino; alloro; acero; magnolia},
otteniamo l'**insieme unione** di A e di B.
In simboli:

C = A ∪ B, leggi "C uguale A unione B".

Il simbolo ∪ è detto **di unione**.

Figura 14



Possiamo concludere dicendo che:

> **Dati due insiemi A e B, dicesi *unione* di tali insiemi, e si indica con il simbolo A ∪ B, l'insieme costituito da quegli elementi che appartengono almeno a uno dei due insiemi considerati.**

Anche l'insieme unione si può rappresentare:

1) **per elencazione:**
A = {rosa; margherita; tulipano; garofano}
B = {rosa; viola; tulipano; anemone}
A ∪ B = {rosa; margherita; tulipano; garofano; viola; anemone}
(*gli elementi in comune ai due insiemi si prendono una volta sola*);

2) **per caratteristica:**
$A = \{a | a$ è una lettera della parola "cinque"}
$B = \{b | b$ è una lettera della parola "mila"}
$A \cup B = \{x | x : x \in A \text{ o } x \in B\}$, cioè $A \cup B = \{x | x$ è una lettera della parola "cinquemila"};

3) **graficamente:**

a) A = {banana; mela; ciliegia; castagna}
B = {castagna; ciliegia; pera; fragola}
l'insieme $A \cup B$ si rappresenta come in Fig. 15.

b) A = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}
B = {2; 4; 6}
l'insieme $C = A \cup B$ si rappresenta come in Fig. 16.

c) A = {*b*; *c*; *d*; *f*; *g*}
B = {*h*; *l*; *m*; *n*}
l'insieme $C = A \cup B$ si rappresenta come in Fig. 17.

Figura 15

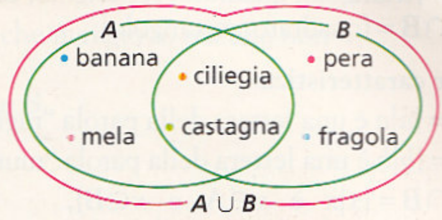


Figura 16

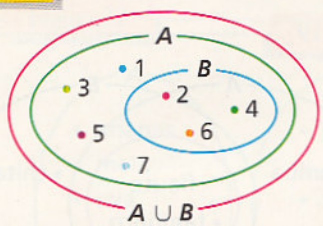
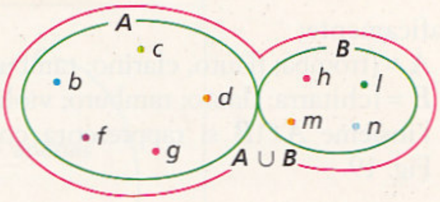


Figura 17



Intersezione

Consideriamo gli insiemi:

A = {*a*|*a* è un uomo con la barba}
B = {*b*|*b* è un uomo con i baffi}.

Se osserviamo la loro rappresentazione grafica (Fig. 18), ci accorgiamo che ci sono tre uomini, Mussi, Bucci e Rovi, che hanno sia la barba sia i baffi. Possiamo allora formare l'insieme **C** con questi elementi che appartengono sia ad **A** sia a **B**:

C = {c|c è un uomo che ha la barba e i baffi};

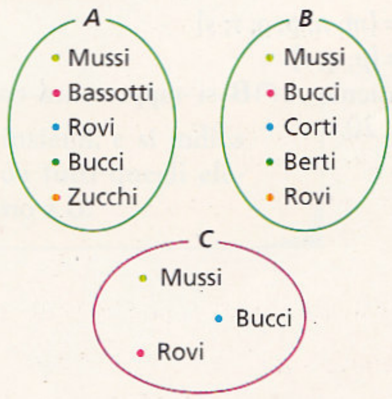
otteniamo così l'**insieme intersezione** di A e B.
In simboli:

$C = A \cap B$, leggi: "C uguale A intersezione B".

Il simbolo ∩ è detto **di intersezione**.

Possiamo concludere dicendo che:

Figura 18



Dati due insiemi A e B, dicesi intersezione di tali insiemi, e si indica con il simbolo $A \cap B$, l'insieme costituito da quegli elementi che appartengono sia ad A che a B.

Se due insiemi non hanno elementi in comune, la loro intersezione è $\varnothing$; in questo caso i due insiemi si dicono **disgiunti**.

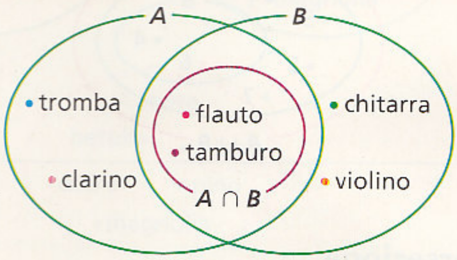
Anche l'insieme intersezione si può rappresentare:

1) **per elencazione:**
   $A = \{$quadrato; rombo; rettangolo; parallelogramma$\}$
   $B = \{$triangolo; quadrato; rettangolo; esagono$\}$
   $A \cap B = \{$quadrato; rettangolo$\}$;

2) **per caratteristica:**
   $A = \{a \mid a$ è una lettera della parola "ragione"$\}$
   $B = \{b \mid b$ è una lettera della parola "murena"$\}$
   $A \cap B = \{x \mid x \text{ è } x \in A \text{ e } x \in B\}$,
   cioè
   $A \cap B = \{x \mid x$ è una lettera della parola "rane"$\}$;

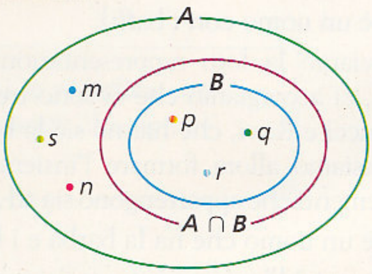
3) **graficamente:**
   a) $A = \{$tromba; flauto; clarino; tamburo$\}$
   $B = \{$chitarra; flauto; tamburo; violino$\}$
   l'insieme $A \cap B$ si rappresenta come in Fig. 19.

Figura 19



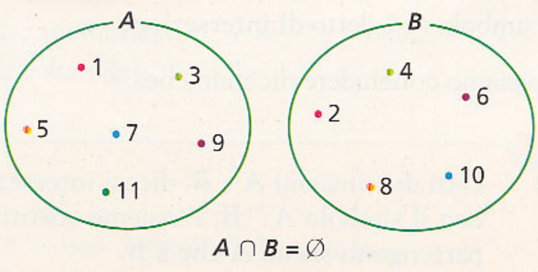
   b) $A = \{m; n; p; q; r; s\}$
   $B = \{p; q; r\}$
   l'insieme $A \cap B$ si rappresenta come in Fig. 20.

Figura 20



   c) $A = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$
   $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$
   l'insieme $A \cap B$ è vuoto, come è mostrato in Fig. 21.

Figura 21



Differenza

Consideriamo gli insiemi:

$A = \{a | a$ è la frutta che mangio$\}$

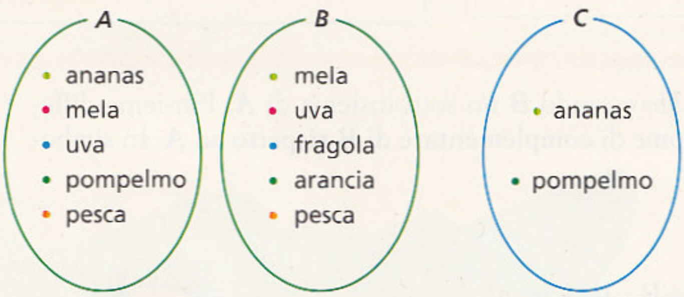
$B = \{b | b$ è la frutta che mangia Paolo$\}$

di cui, in Fig. 22, è data la rappresentazione grafica.
Consideriamo poi l'insieme **C** formato da tutta la frutta che mangio io ma che non mangia Paolo.
Diremo che l'insieme **C** è la **differenza** fra gli insiemi **A** e **B**.
In simboli scriveremo:

$C = A - B$ oppure $C = A \setminus B$

I simboli $-$ e $\setminus$ sono detti di **differenza**.

Figura 22



Possiamo concludere dicendo che:

Dati due insiemi A e B, dicesi *differenza* di tali insiemi, e si indica con i simboli $A - B$ o $A \setminus B$, l'insieme costituito da tutti quegli elementi che appartengono ad A ma non appartengono a B.

Anche l'insieme differenza si rappresenta:

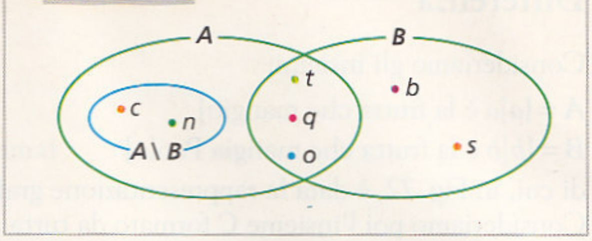
1) **per elencazione:**
   A = {libro; quaderno; penna; diario}
   B = {libro; matita; penna; temperamatite}
   A\B = {quaderno; diario};

2) **per caratteristica:**
   $A = \{a | a$ è una lettera della parola "trave"$\}$
   $B = \{b | b$ è una lettera della parola "velo"$\}$
   $A - B = A \setminus B = \{x | x$ è $x \in A$ e $x \notin B\}$,
   cioè
   $A - B = A \setminus B = \{x | x$ è una lettera della parola "tra"$\}$;

3) **graficamente**:

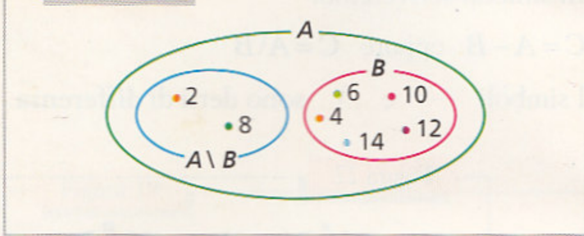
a) $A = \{c; t; n; q; o\}$
$B = \{b; q; s; o; t\}$
l'insieme $A \setminus B$ si rappresenta come in Fig. 23.

Figura 23



b) $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$
$B = \{4; 6; 10; 12; 14\}$
l'insieme $A \setminus B$ si rappresenta come in Fig. 24.

Figura 24



Consideriamo ancora il caso 3*b*: essendo **B** un sottoinsieme di **A**, l'insieme differenza $A \setminus B = \{2; 8\}$ prende il nome di **complementare di B rispetto ad A**. In simboli si scrive $\mathscr{C}_A B$.

Esempio

Siano: $A = \{f; g; h; l; m; n\}$ e $B = \{h; l; m; n\}$.
Poiché $B \subset A$, possiamo scrivere:
$A \setminus B = \mathscr{C}_A B = \{f; g\}$.

Possiamo quindi dire che:

Dati due insiemi A e B, se $B \subset A$, dicesi *complementare* di B rispetto ad A l'insieme $\mathscr{C}_A B$, differenza fra A e B.

Esempio

Dati gli insiemi:
$A = \{3; 7; 9; 11; 13; 15\}$ e $B = \{7; 11; 15; 17\}$
scrivere per elencazione e graficamente gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$.

1) $A \cup B$ a) $A \cup B = \{3; 7; 9; 11; 13; 15; 17\}$
b) vedi Fig. 25.

Figura 25